LICEO SCIENTIFICO STATALE "MARIE CURIE" Savignano s. R. (FC) CLASSE 3C ESERCIZI SU MOMENTO ANGOLARE-ROTOLAMENTO

Esercizio

Può una forza centrale modificare il momento angolare?

In laboratorio c'è un tavolo con un foro al centro, e Giovanni e Letizia lo utilizzano per un esperimento sulla conservazione del momento angolare. I due studenti fissano una sferetta a un capo di una fune e fanno passare l'altro capo attraverso il foro. Mettono quindi la sferetta in rotazione sul tavolo, rilevando che essa, su una circonferenza di raggio 0,800 m, compie 90,0 giri al minuto. Poi Giovanni tira la fune da sotto il tavolo, riducendo il raggio a 0,480 m. Assumendo che l'attrito sia trascurabile, con quale frequenza gira alla fine la sferetta?

DATI E INCOGNITE

$f_1 = 90{,}0$ giri/min $\quad r_2 = 0{,}480$ m

$r_1 = 0{,}800$ m $\quad f_2 = ?$

SOLUZIONE

Rispetto al centro della traiettoria, il momento risultante delle forze è nullo. Il peso della sferetta e la reazione normale del tavolo hanno infatti momenti opposti, che si elidono, mentre la tensione della fune, essendo una forza centrale, ha un momento nullo. Pertanto il momento angolare della sferetta si conserva.

Quando la sferetta, di massa m, si muove su una circonferenza di raggio r_1 con frequenza f_1, il suo momento di inerzia è $I_1 = m\, r_1^2$ e la sua velocità angolare è $\omega_1 = 2\pi\, f_1$. Essa ha, pertanto, un momento angolare espresso da:

$$L_1 = I_1\, \omega_1 = 2\, \pi\, m\, r_1^2\, f_1$$

Analogamente, quando si muove su una circonferenza di raggio r_2 con frequenza f_2, il suo momento angolare è:

$$L_2 = 2\, \pi\, m\, r_2^2\, f_2$$

Poiché in nessun caso una forza centrale può modificare il momento angolare, è $L_1 = L_2$. Si trova dunque:

$$\cancel{2\pi m}\, r_1^2\, f_1 = \cancel{2\pi m}\, r_2^2\, f_2$$

$$f_2 = \left(\frac{r_1}{r_2}\right)^2 f_1 = \left(\frac{0{,}800\,\text{m}}{0{,}480\,\text{m}}\right)^2 (90{,}0\,\text{giri/min}) =$$
$$= 250\,\text{giri/min} = 4{,}17\,\text{Hz}$$

PROSEGUI TU

Quali sono la velocità iniziale e la velocità finale della sferetta? [7,54 m/s; 12,6 m/s]

Esercizio

Esempio 8.8

Una giostra avente il raggio di 2 m e il momento d'inerzia di 500 kg · m^2 ruota senza attrito; essa compie 1 giro ogni 5 s. Un bambino di 25 kg seduto nel centro si sposta fino al bordo. Si trovi la nuova velocità angolare della giostra.

Poiché non vi sono momenti dovuti a forze esterne che agiscono sul sistema bambino-giostra, il momento angolare del sistema resta costante. Inizialmente il bambino è nel centro e quindi non ha un momento d'inerzia apprezzabile rispetto all'asse; ne segue che non ha momento angolare. Quando raggiunge il bordo, egli ha il momento angolare $I_b\omega_f$, dove $I_b = mr^2$ è il momento d'inerzia del bambino rispetto all'asse della giostra e ω_f è la velocità angolare finale del bambino e della giostra. Poiché la massa del bambino è 25 kg e r è 2 m, il momento d'inerzia del bambino quando si trova sul bordo è

$$I_b = (25\text{ kg})(2\text{ m})^2 = 100\text{ kg}\cdot\text{m}^2$$

Chiamando I_g il momento d'inerzia della giostra e ω_i la sua velocità angolare iniziale, si ha, imponendo la conservazione del momento angolare,

$$I_g\omega_i = I_g\omega_f + I_b\omega_f = (I_g + I_b)\,\omega_f$$

$$\omega_f = \frac{I_g}{I_g + I_b}\,\omega_i = \frac{500\text{ kg}\cdot\text{m}^2}{(500+100)\text{ kg}\cdot\text{m}^2}\,\omega_i = \tfrac{5}{6}\,\omega_i$$

Poiché la giostra inizialmente faceva 1 giro in 5 s, la sua velocità angolare iniziale è (1/5) giro/s, ossia 0,4 π rad/s. La velocità angolare finale è quindi

$$\omega_f = \tfrac{5}{6}(\tfrac{1}{5}\text{ giro/s}) = \tfrac{1}{6}\text{ giro/s}$$

Quindi, dopo che il bambino ha raggiunto il bordo, la giostra compie 1 giro ogni 6 s.

Quando il bambino è nel centro della giostra, egli è fermo. Se si sposta in fuori, egli comincia a descrivere una circonferenza. La forza che accelera il bambino è l'attrito esercitato dalla giostra. Questa forza è tangente alla circonferenza e quindi produce un momento che aumenta il momento angolare del bambino. Quest'ultimo, a sua volta, esercita sulla giostra una forza d'attrito uguale e opposta; il momento di questa forza diminuisce il momento angolare della giostra.

Esercizio

Esempio 8.9

Un disco con momento d'inerzia I_1 ruota con velocità angolare ω_i attorno a un asse privo d'attrito. Esso cade su un altro disco, avente momento d'inerzia I_2, che è inizialmente fermo sullo stesso asse (vedi figura 8.10). A causa dell'attrito superficiale i due dischi finiscono per avere una velocità angolare comune ω_f. Si trovi questa velocità angolare comune finale.

Ciascun disco esercita un momento di forza sull'altro, ma non esiste alcun momento di forza esterno al sistema dei due dischi. Il momento angolare del primo disco rispetto al suo centro di massa è

$$L_i = L_1\omega_i$$

Quando entrambi i dischi ruotano insieme, il momento angolare totale è

$$L_f = I_1\omega_f + I_2\omega_f = (I_1 + I_2)\omega_f$$

Uguagliando il momento angolare finale a quello iniziale, si ha

$$(I_1 + I_2)\omega_f = I_1\omega_i$$

La velocità angolare finale è quindi

$$\omega_f = \frac{I_1}{I_1 + I_2}\omega_i$$

Questa interazione tra i dischi è analoga all'urto anelastico tra due masse in una dimensione. In questo urto non si conserva l'energia: lo si può vedere scrivendo l'energia in funzione del momento angolare. L'energia cinetica iniziale è

$$E_{ci} = \tfrac{1}{2}I_1\omega_i^2 = \frac{(I_1\omega_i)^2}{2I_1} = \frac{L_i^2}{2I_1}$$

L'energia cinetica finale è

$$\tfrac{1}{2}(I_1 + I_2)\omega_f^2 = \frac{[(I_1 + I_2)\omega_f]^2}{2(I_1 + I_2)} = \frac{L_f^2}{2(I_1 + I_2)}$$

Poiché $L_f = L_i$, l'energia cinetica finale è minore di quella iniziale secondo un fattore $I_1/(I_1+I_2)$.

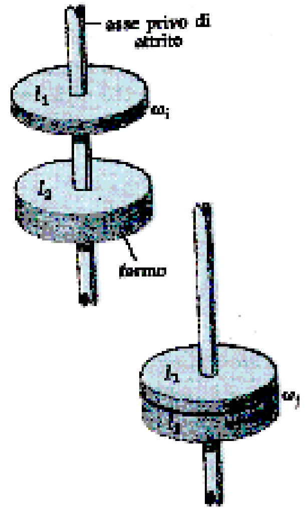


Figura 8.10. L'urto rotazionale anelastico dell'esempio 8.9. Poiché i soli momenti di forza che agiscono sono interni al sistema, il momento angolare si conserva.

Dati esercizio: I_1=5,0 *Kg·m*^{2} I_2=10 *Kg·m*^{2} ω_i =10*giri/sec*

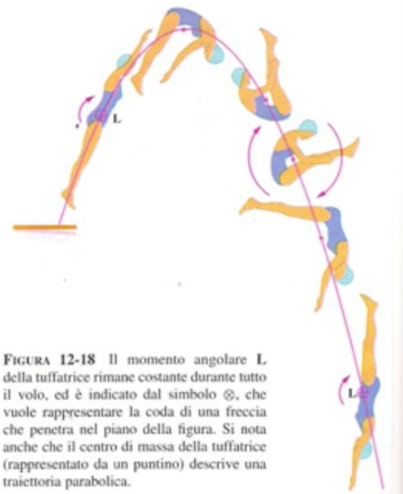


FIGURA 12-18 Il momento angolare L della tuffatrice rimane costante durante tutto il volo, ed è indicato dal simbolo ⊗, che vuole rappresentare la coda di una freccia che penetra nel piano della figura. Si nota anche che il centro di massa della tuffatrice (rappresentato da un puntino) descrive una traiettoria parabolica.

Esercizio Un tuffatore esegue un triplo salto mortale durante il volo verso la piscina di durata t = 2,00sec. Durante il primo e ultimo quarto di giro il corpo del tuffatore è completamente disteso con momento d'inerzia I_1=20,0 Kg·m^2 · Nel tratto intermedio è in posizione raccolta con I_2 = 5,00 Kg·m^2. Determinare ω_1 e ω_2.

[ω_1=0,563*rad/sec*; ω_2=2,25*rad/sec*]

<u>Esercizio</u> Uno studente tiene con la mano una ruota di bicicletta che gira intorno a un asse verticale, il momento d'inerzia della ruota è $I_{ruota} = 1{,}5 Kg{\cdot}m^2$ e la velocità angolare è $\omega_{ruota} = 4{,}0 giri/sec$. Lo studente capovolge la ruota provocando una rotazione di se stesso attorno all'asse dello sgabello. Il momento d'inerzia del sistema sgabello+studente+ruota è $I_0 = 7{,}0\ Kg{\cdot}m^2$. Calcolare la velocità angolare del sistema sgabello+studente+ruota. [1,7*giri/sec*]

SOLUZIONE: Non esiste alcun momento netto di forze che agiscano sul sistema *studente + sgabello + ruota* atto a far variare il momento angolare del sistema rispetto a qualsiasi asse verticale. Il momento angolare iniziale del sistema coincide con il momento angolare $\mathbf{L}_i$ della sola ruota. Dopo l'inversione della direzione dell'asse di rotazione della ruota, il sistema deve conservare un momento angolare complessivo avente lo stesso modulo e la *stessa direzione*.

Dopo l'inversione, il momento angolare della ruota diventa $-\mathbf{L}_i$: per ripristinare il valore originario, il sistema *studente + sgabello* deve acquistare un certo momento angolare, che chiameremo $\mathbf{L}$. Sarà allora, come indica graficamente la figura 12-20c,

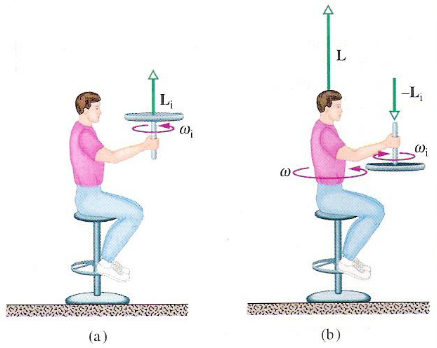
$$L_i = L + (-L_i),$$

ovvero

$$L = 2L_i = I_0\omega,$$

ove ω è la velocità angolare assunta dallo studente per effetto dell'inversione del moto rotatorio della ruota. Da ciò si ricava

Il segno positivo del risultato trovato ci conferma che lo studente gira in senso antiorario visto dall'alto. Se vuole smettere di girare, deve soltanto capovolgere nuovamente la ruota.



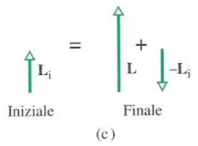


FIGURA 12-20 Problema svolto 12-10. (a) Uno studente tiene con la mano una ruota di bicicletta che gira intorno a un asse verticale. (b) Lo studente capovolge la ruota, provocando così una rotazione di se stesso attorno all'asse dello sgabello. (c) Il momento angolare complessivo del sistema deve infatti rimanere costante nonostante l'inversione del senso di rotazione della ruota di bicicletta.

<u>Esercizio</u> Un cilindro di massa pari a 2,4*Kg* e raggio 0,45*m* ruota attorno al proprio asse con velocità angolare pari a 3,2 *rad/sec*. Determina il momento angolare del cilindro. [0,78$Kg{\cdot}m^2/sec$]

<u>Esercizio</u> Jacopo è seduto su uno sgabello e può ruotare tenendo in mano due pesetti. Inizialmente il sistema ha velocità angolare $\omega_i = 1{,}0 giri/sec$ e momento d'inerzia $I_i = 10 Kg{\cdot}m^2$. Successivamente Jacopo avvicina le braccia al corpo e il suo momento d'inerzia diventa $I_i/2$. Quale sarà la sua velocità angolare ω_f?

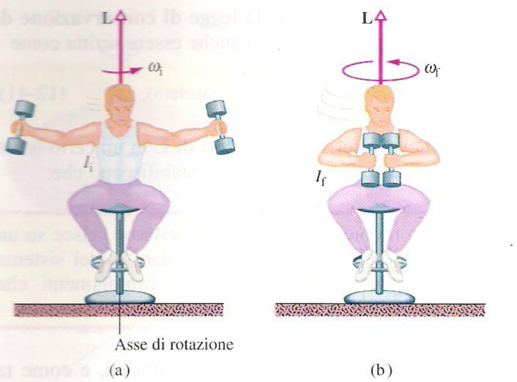


FIGURA 12-17 (a) Lo studente ha un momento d'inerzia relativamente grande e una velocità angolare relativamente piccola. (b) Lo studente, facendo diminuire il proprio momento d'inerzia, aumenta automaticamente la propria velocità angolare. Il momento angolare L del sistema rotante rimane invariato.

Esercizio Una sfera omogenea di raggio R e massa *m*, un disco omogeneo e un cilindro cavo (assimilabile ad un anello) aventi la stessa massa *m* e lo stesso raggio R rotolano su un piano inclinato di 12° rispetto al piano orizzontale per un tratto di 2,5m. Determinare le velocità dei centri di massa dei tre corpi quando giungono alla base del piano inclinato. Qual è la percentuale di energia cinetica rotazionale e traslazionale dei tre oggetti in fondo al piano? [2,7*m/sec*; 2,6*m/sec*; 2,3*m/sec*]

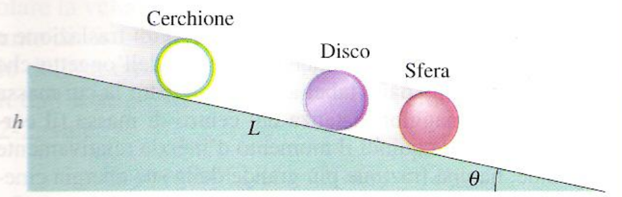


FIGURA 12-7 Problemi svolti 12-2 e 12-3. Un cerchione, un disco e una sfera rotolano, partendo da fermi, giù per una rampa inclinata di un angolo θ. Pur essendo partiti dalla stessa posizione e allo stesso istante, arriveranno in fondo nell'ordine che appare nella figura.

accelerazione angolare e la sua accelerazione lineare devono essere legate dall'equazione 8.28. L'accelerazione angolare è la conseguenza della forza di attrito statico esercitata dalla superficie sulla sfera: questa forza fornisce un momento rispetto al centro di massa della sfera il quale fa aumentare la sua velocità angolare, mentre la sua velocità lineare aumenta per mantenere il rotolamento.

È possibile trovare la velocità di una sfera o di un cilindro in fondo a un piano inclinato con considerazioni energetiche. Quello dei due corpi che ha la velocità maggiore in fondo al piano inclinato deve avere la velocità media maggiore, e quindi raggiunge il fondo per primo. Consideriamo prima la sfera. In cima al piano inclinato la sua energia è mgh, dove h è la quota. In fondo al piano inclinato la sfera ha sia energia cinetica di rotazione sia energia cinetica di traslazione. Il principio di conservazione dell'energia dà

$$\tfrac{1}{2}mv^2 + \tfrac{1}{2}I\omega^2 = mgh$$

Si può usare la condizione per il rotolamento, $v = R\omega$, per eliminare v o ω. Eliminando ω si ottiene

$$\tfrac{1}{2}mv^2 + \tfrac{1}{2}I(v/R)^2 = mgh$$

Risolvendo rispetto a v^2, si ha

$$v^2 = \frac{2mgh}{m + I/R^2} \qquad 8.31$$

Il momento d'inerzia di una sfera (tabella 8.1) è $(2/5)mR^2$. Sostituendo questa espressione nell'equazione 8.31, si ottiene

$$v^2 = \frac{2mgh}{m + 2m/5} = \tfrac{5}{7}(2gh) \qquad \text{sfera} \qquad 8.32$$

Questo valore è minore del risultato $v^2 = 2gh$ che si ottiene per un corpo che striscia senza attrito lungo un piano inclinato. L'equazione 8.31 si applica anche a un cilindro che ha il momento d'inerzia $I = \frac{1}{2}mR^2$. Sostituendo questa espressione per I nell'equazione 8.31, si ottiene

$$v^2 = \frac{2mgh}{m + m/2} = \tfrac{2}{3}(2gh) \qquad \text{cilindro} \qquad 8.33$$

Poiché $5/7 = 0{,}71$ è maggiore di $2/3 = 0{,}67$, la velocità della sfera è maggiore ed essa arriva per prima sul fondo, se i due corpi sono lasciati andare contemporaneamente. Si noti che le equazioni 8.32 e 8.33 non contengono il raggio della sfera o del cilindro: qualsiasi sfera vincerebbe su qualsiasi cilindro, supponendo che essi abbiano distribuzioni di massa uniformi.

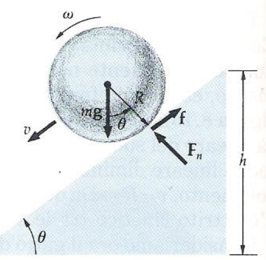
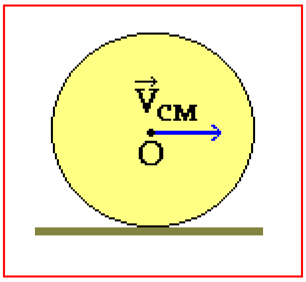


Figura 8.16. Una sfera che scende rotolando lungo un piano inclinato. C'è una forza d'attrito che agisce parallelamente al piano inclinato, verso l'alto; essa esercita un momento rispetto al centro di massa della sfera, il quale aumenta la sua velocità angolare e mantiene la condizione per il rotolamento mentre la sfera accelera giù per il piano inclinato.

Quesito

7. Un disco rotola, senza strisciare, su una superficie orizzontale con la velocità v. Qual è la velocità del punto più alto del disco rispetto alla superficie?

Problema Un disco di massa M=0,5Kg, raggio R=20 cm, rotola su un pavimento orizzontale ed il suo centro ha velocità v=2m/s. Determinare l'energia cinetica del disco e la velocità angolare intorno all'asse baricentrale perpendicolare al piano del disco.



Discussione del problema

Indicata con V_{CM} la velocità del centro del disco (centro di massa) ed ω il modulo della velocità angolare con cui il disco ruota intorno al suo centro, l'energia cinetica è espressa

$$E_c = E_{traslazione} + E_{rotazione} = \frac{1}{2} M V_{CM}^2 + \frac{1}{2} I \omega^2$$

Poiché per le espressioni del momento d'inerzia *I* rispetto all'asse baricentrale perpendicolare al piano del disco e della velocità angolare ω sono rispettivamente:

$$I_{CM} = \frac{1}{2} M R^2 \ , \ \omega = \frac{V_{CM}}{R}$$

si ha:

$$E_c = \frac{1}{2} M V_{CM}^2 + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} M R^2 \cdot \frac{V_{CM}^2}{R^2} = \frac{3}{4} M V_{CM}^2$$

Sostituendo i valori delle grandezze note troviamo l'energia del disco.

$$E_c = \frac{3}{4} M V_{CM}^2 = 0.75 \cdot 0.5\,Kg \cdot (2m/s)^2 = 1{,}5J$$

Il valore richiesto per la velocità angolare è

$$\omega = \frac{V_{CM}}{R} = \frac{2m/s}{0{,}2m} = 10\,Rad/s$$

Osservazione

Vogliamo cogliere l'opportunità per far notare che quando un corpo è in moto rototraslatorio l'energia cinetica immagazzinata sotto forma rotazionale può rappresentare una parte considerevole dell'energia meccanica complessiva. Nel caso in esame l'energia rotazionale rappresenta il 50% dell'energia cinetica di traslazione ed un terzo dell'energia meccanica complessiva: il risultato si deduce considerando il rapporto

$$\frac{E_{rotazione}}{E_{traslazione}} = \frac{\frac{1}{4}MV_{CM}^2}{\frac{1}{2}MV_{CM}^2} = 0{,}5 = 50\%$$

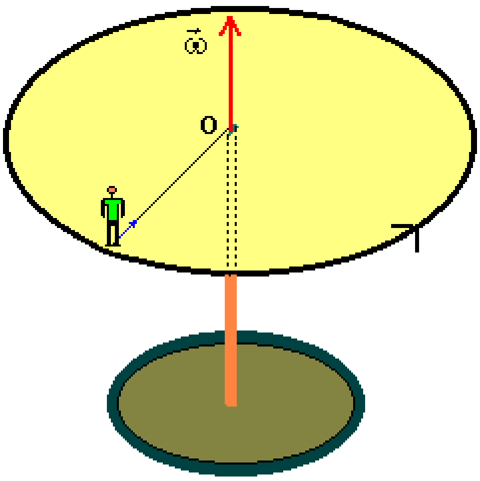
Osserviamo ancora che se la massa del disco non è distribuita omogeneamente, ma si trova per la gran parte localizzata nella zona periferica[(1)], allora il momento d'inerzia, rispetto ad un disco omogeneo avente lo stesso raggio e la stessa massa, è maggiore e l'energia meccanica rotazionale rappresenterà una percentuale ancora maggiore. Questa osservazione dovrebbe suggerire di non trascurare nella risoluzione dei problemi coinvolgenti corpi in moto rototraslatorio la parte di energia meccanica disponibile in forma rotazionale.

[(11)] Si pensi ad una ruota dotata di raggi robusti ma la cui massa rappresenti solo una piccola frazione della massa totale, distribuita per la gran parte nella zona periferica (anello)

Un uomo si muove su una piattaforma rotante

(Conservazione del momento angolare)

Problema Un uomo di massa 70Kg si trova sul bordo di una piattaforma circolare di raggio R=2m e di massa M=180Kg. Il sistema ruota con velocità di 20 giri/min. Ad un certo punto l'uomo decide di avvicinarsi di 50cm al centro della piattaforma. Determinare la nuova velocità angolare del sistema rotante e la variazione di energia cinetica.



Soluzione

Durante il moto dell'uomo sulla piattaforma il sistema **uomo+piattaforma** è isolato e quindi si conserva il momento angolare[(1[1])]. Infatti, ricordiamo che indicando con $\vec{L}$ il momento angolare del sistema rispetto all'asse di rotazione sussiste la relazione

$$\vec{M}_{est} = \frac{\Delta \vec{L}}{\Delta t}$$

e non essendoci forze esterne agenti sul sistema risulta

$$\vec{M}_{est} = 0$$

per cui si ha anche

$$\underline{\Delta\vec{L} = 0} \text{ cioè } \underline{\vec{L} \text{ costante}}$$

Ricordiamo inoltre che in un sistema isolato le forze si presentano a coppie, cioè possono essere presenti a due a due ed hanno moduli uguali, sono parallele e versi opposti. Per questo motivo il momento risultante delle forze interne al sistema, calcolato rispetto ad un punto qualsiasi O, nonché rispetto ad un asse qualsiasi, è sempre nullo. Ciò premesso, ai fini della risoluzione del problema in esame, ricordiamo la relazione esistente tra momento d'inerzia I del corpo, velocità angolare $\vec{\omega}$ di rotazione e momento angolare $\vec{L}$ rispetto all'asse di rotazione:

$$\vec{L} = I \cdot \vec{\omega}$$

Indichiamo con I_1 e I_2 rispettivamente i valori del momento d'inerzia e della velocità angolare nelle due posizioni:

1 posizione iniziale, l'uomo è sul bordo della piattaforma;

2 posizione finale, l'uomo si è avvicinato di 50 cm al centro della piattaforma.

Dal **principio di conservazione del momento angolare** si deduce l'uguaglianza:

$$I_1\omega_1 = I_2\omega_2$$

da cui

$$\omega_2 = \frac{I_1}{I_2} \cdot \omega_1$$

Calcolo dei momenti d'inerzia

Il momento d'inerzia del sistema meccanico nei due casi è dato dalla somma del momento d'inerzia del disco con il momento d'inerzia dell'uomo rispetto all'asse. Ora, non avendo informazioni diverse sulla piattaforma rotante la riteniamo come un disco omogeneo di massa M e raggio R e dunque il suo momento d'inerzia rispetto all'asse di rotazione (passante per il CM e perpendicolare al piano della piattaforma) è

$$I_p = \frac{1}{2}MR^2;$$

per quanto concerne l'uomo lo riteniamo puntiforme (sarebbe esattamente la stessa cosa se si considerasse la sua massa distribuita lungo un segmento verticale) ed indicando con **m** la sua massa, il suo momento d'inerzia nella posizione n.1 è

$$I_{u1} = mR^2$$

Il momento d'inerzia complessivo del sistema rispetto all'asse è allora

$$I_1 = I_p + I_{u1} = \frac{1}{2}MR^2 + mR^2$$

Nella posizione finale, la n.2, il momento d'inerzia della piattaforma è ancora lo stesso ma è diminuito il momento d'inerzia dell'uomo perché la sua distanza dal centro di rotazione è diminuita. L'uomo si è avvicinato di un quarto del raggio della piattaforma, quindi la distanza dal centro ora è

$$d = \frac{3R}{4}$$

per cui il momento d'inerzia rispetto allo stesso asse è

$$I_{u2} = m\left(\frac{3R}{4}\right)^2 = \frac{9}{16}mR^2 = \frac{9}{16}I_{u1}$$

Possiamo scrivere allora il momento d'inerzia del sistema nella posizione finale

$$I_2 = I_p + I_{u2} = \frac{1}{2}MR^2 + \frac{9}{16}mR^2 \quad (*)$$

Utilizzando la relazione (*) determiniamo la velocità angolare finale del sistema rotante.

$$\omega_2 = \frac{I_1}{I_2}\omega_1 = \left[\frac{(M+2m)R^2}{2} : \frac{(8M+9m)R^2}{16}\right]\omega_1 = \frac{8(M+2m)}{8M+9m}\omega_1$$

Sostituendo i valori assegnati nel testo del problema ricaviamo

$$\omega_2 = \frac{8(180+2\cdot 70)Kg}{(8\cdot 180+9\cdot 70)Kg}\cdot\omega_1 = \frac{256}{207}\cdot\omega_1 = 24{,}73\,giri/min$$

Calcolo della variazione dell'energia cinetica

Sappiamo che l'energia cinetica rotazionale di un sistema rotante che abbia momento d'inerzia **I** e velocità angolare ω è

$$E_c = \frac{1}{2}I\omega^2$$

e la variazione di energia cinetica del sistema si ottiene dalla differenza tra il valore finale ed il valore iniziale. Quindi

$$\Delta E_c = E_c^f - E_c^i = \frac{1}{2}I_2\omega_2^2 - \frac{1}{2}I_1\omega_1^2$$

Calcoliamo i valori delle diverse grandezze in gioco.

$$\omega_1 = \frac{20\,giri}{min} = \frac{20 \cdot 2\pi Rad}{60s} = \frac{2\pi Rad}{3s} = \frac{2{,}09\,Rad}{s};$$

$$\omega_2 = \frac{256}{207}\omega_1 = \frac{256}{207} \cdot \frac{2\pi Rad}{3s} = \frac{2{,}59\,Rad}{s};$$

$$I_1 = \left(\frac{1}{2}M + m\right)R^2 = \left(\frac{180}{2} + 70\right)Kg \cdot (2m)^2 = 640\,Kgm^2;$$

$$I_2 = \left(\frac{1}{2}M + \frac{9}{16}m\right)R^2 = \left(\frac{180}{2} + \frac{9 \cdot 70}{16}\right)Kg \cdot (2m)^2 = 517{,}5\,Kgm^2$$

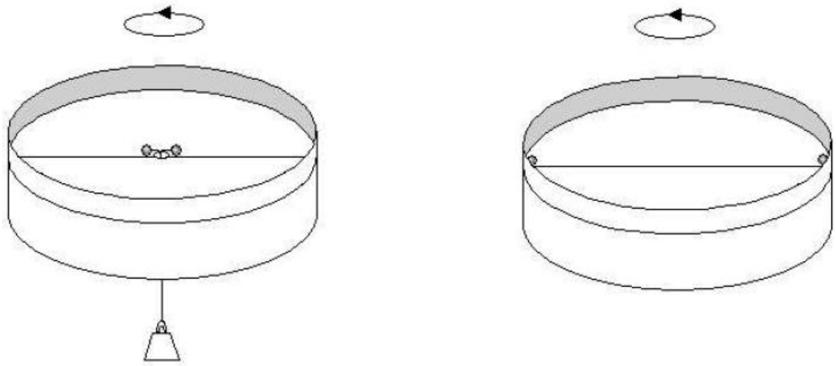
$$\Delta E_c = \frac{1}{2}\left(I_2\omega_2^2 - I_1\omega_1^2\right) = 0{,}5\left[517{,}5 \cdot (2{,}59)^2 - 640 \cdot (2{,}09)^2\right]J = 337{,}93\,J$$

Osservazione

La variazione di energia cinetica è positiva e ciò non deve meravigliare. Infatti l'uomo per muoversi deve compiere lavoro e questo, supponendo di trascurare ogni forma di attrito, lo si ritrova come aumento di energia cinetica del sistema meccanico.

ESERCIZIO

Un disco omogeneo di massa M e raggio R ruota intorno all'asse passante per il suo centro di massa (vedi figura) con velocità ω. A una distanza $r = R/10$ dal centro del disco sono fissate due palline di massa $m = M/2$ ciascuna; ad un certo istante il blocco che mantiene ferme le due palline viene rimosso e le due palline raggiungono il bordo del disco (muovendosi su una guida priva di attrito), senza cadere. Quale sarà il rapporto tra la velocità angolare in questa situazione e la velocità angolare iniziale del sistema? (approssimare le due palline a due punti materiali).



La conservazione del momento angolare afferma che

$$P_f = P_i \tag{1}$$

dove il momento angolare è definito da

$$P = I\omega \tag{2}$$

dove I è il momento di inerzia di un corpo rispetto all'asse di rotazione.

Il momento angolare iniziale è dato dalla somma del momento angolare del disco $P_{Di} = I_D\omega = \frac{1}{2}MR^2\omega$ (dove I_D è il momento di inerzia del disco rispetto all'asse passante per il suo cdm) e il momento angolare delle due palline $P_{pp} = 2P_p = 2mr^2\omega$. Il momento angolare finale è dato dalla somma $\frac{1}{2}MR^2\omega_f + 2mR^2\omega_f$. Quindi, l'espressione della conservazione del momento angolare può essere riscritta:

$$\frac{1}{2}MR^2\omega + 2mr^2\omega = \frac{1}{2}MR^2\omega_f + 2mR^2\omega_f \tag{3}$$

ovvero

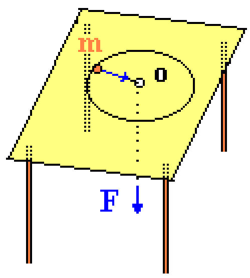
$$\frac{1}{2}MR^2\omega + M(\frac{R}{10})^2\omega = \frac{1}{2}MR^2\omega_f + MR^2\omega_f \tag{4}$$

da cui si ricava

$$\frac{\omega_f}{\omega} = \frac{17}{50} = 0.34 \tag{5}$$

Una massa ruota su un piano orizzontale senza attrito (conservazione del momento angolare)

Problema Un corpo di massa m = 50g è legato ad un filo di massa trascurabile e ruota su un tavolo piano orizzontale, privo d'attrito, descrivendo una traiettoria circolare di centro il punto O (vedi figura). Sapendo che il raggio della circonferenza misura 72cm e che la velocità angolare è di 30 giri/min, risolvere i seguenti quesiti.



1) Determinare il modulo della forza **F** esercitata sul filo che garantisce il moto.

2) Supponendo che si sposti il punto d'applicazione della forza verso il basso di 12 *cm*, determinare il valore della velocità angolare con cui descriverà la nuova traiettoria la massa ***m***. Determinare il valore della forza F_2 che nella nuova posizione garantisce il moto circolare.

$$v = \omega r, a_c = \frac{v^2}{r}$$

$$F = ma_c = m\frac{v^2}{r} = m\omega^2 r$$

3) Determinare il lavoro che la forza **F** deve compiere affinché il raggio della traiettoria si riduca alla metà del valore iniziale.

Soluzione

1) La massa **m** è soggetta ad un moto circolare uniforme, detti $\vec{v}$ la sua velocità lineare ed $\boldsymbol{\omega}$ il modulo della velocità angolare, l'accelerazione è centripeta ed è originata dalla forza **F**, la cui azione viene trasmessa tramite il filo.

Sussistono le seguenti relazioni:

$$v = \omega r,\ a_c = \frac{v^2}{r},\ F = ma_c = m\frac{v^2}{r} = m\omega^2 r$$

Dai dati forniti ricaviamo allora il modulo della forza **F**.

$$F = m\omega^2 r = 50\cdot 10^{-3}\,Kg\cdot(30\,giri/min)^2\cdot 0{,}72m = 0{,}355\,N$$

2) Se la forza F sposta il punto di applicazione verso il basso di 12 cm anche il raggio della traiettoria si riduce della stessa misura; la massa continuerà a ruotare di moto circolare uniforme ma ovviamente con altra velocità. Indichiamo con r_i, ω_i, v_i, le grandezze cinematiche iniziali mentre con r_f, ω_f, v_f le grandezze cinematiche finali. Osserviamo che la retta di azione della forza **F** passa per l'asse di rotazione della massa (che è la retta perpendicolare al piano del tavolo e passante per il centro O), perciò il suo momento è nullo. Questo fatto implica che il momento angolare della massa rimane costante[(2)]. Indicando con L_i ed L_f rispettivamente i moduli del momento angolare iniziale e finale possiamo scrivere:

[(2)] Ricordiamo che in genere se un moto è causato da una forza centrale, diretta cioè sempre verso uno stesso punto, allora si conserva il momento angolare. Si conserva per esempio il momento angolare di un pianeta che ruota intorno al sole, o di un satellite che ruota intorno alla Terra perché la forza responsabile del moto è la forza gravitazionale che, nel sistema isolato costituito dai due corpi, è sempre diretta verso il centro di massa del sistema.

$$L_i = I_i \varpi_i = L_f = I_f \varpi_f \Rightarrow$$

$$m r_i^2 \omega_i = m r_f^2 \omega_f \Rightarrow \omega_f = \left(\frac{r_i}{r_f}\right)^2 \omega_i \qquad (1)$$

e sostituendo i valori si ha

$$\omega_f = \left(\frac{r_i}{r_f}\right)^2 \omega_i = \left(\frac{72cm}{60cm}\right)^2 \frac{30\,giri}{min} = 43{,}2\,giri/min$$

Calcolo del valore della forza F_2

Sappiamo già che il valore della forza è

$$F_{finale} = m\omega_f^2 r_f = m\left[\left(\frac{r_i}{r_f}\right)^2 \omega_i\right]^2 r_f = \left(m\omega_i^2 r_i\right)\cdot\left(\frac{r_i}{r_f}\right)^3 = F_{iniziale}\cdot\left(\frac{r_i}{r_f}\right)^3 \qquad (2)$$

$$F_2 = \left(m\omega_i^2 r_i\right)\cdot\left(\frac{r_i}{r_f}\right)^3 = F_i\cdot\left(\frac{r_i}{r_f}\right)^3 = 0{,}355\cdot(1.2)^3\,N = 0.61344\,N$$

Osservazione Si noti che la forza **F_2** necessaria a garantire il moto con la riduzione del raggio è maggiore che nel caso precedente.

3) Per calcolare il **lavoro che deve compiere la forza F** affinché il raggio della traiettoria si riduca alla metà di quello iniziale, quindi a 36*cm*, basta applicare il teorema dell'energia cinetica. Infatti non essendoci forze di attrito il lavoro fatto si ritrova sotto forma di aumento dell'energia meccanica disponibile che è solo cinetica e di rotazione.

L'energia di rotazione di un corpo di massa m che ruota intorno ad un asse rispetto al quale la velocità angolare sia ω è:

$$E_c^{rotaz.} = \frac{1}{2} I\omega^2 \qquad (3)$$

e quindi la variazione di energia cinetica rotazionale risulta:

$$\Delta E_c = E_f^{rotaz} - E_i^{rotaz.} = \frac{1}{2} I_f \omega_f^2 - \frac{1}{2} I_i \omega_i^2 = \frac{1}{2}\left(m r_f^2 \omega_f^2 - m r_i^2 \omega_i^2\right) \qquad (4)$$

Tenendo ora presente il legame tra le velocità angolari dedotto dalla conservazione del momento angolare

$$\omega_f = \left(\frac{r_i}{r_f}\right)^2 \omega_i$$

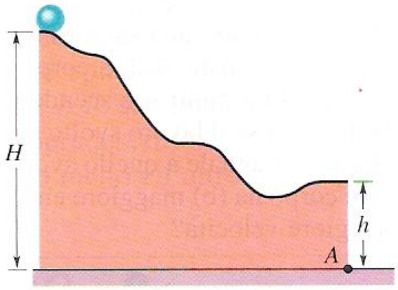
l'espressione della variazione di energia cinetica diventa

$$\Delta E_c = \frac{1}{2} I_f \omega_f^2 - \frac{1}{2} I_i \omega_i^2 = \frac{1}{2}\left(m r_f^2 \cdot \frac{r_i^4}{r_f^4} \cdot \omega_i^2 - m r_i^2 \omega_i^2\right) \Rightarrow$$

$$\Delta E_c = \frac{1}{2} m r_i^2 \omega_i^2 \left(\frac{r_i^2}{r_f^2} - 1\right) = \frac{1}{2} \cdot 0.5 \cdot 0{,}72^2 \cdot \pi^2 \left[\left(\frac{72}{36}\right)^2 - 1\right] J = 0{,}3837\, J$$

8P. Una sfera omogenea, partendo da ferma dal sommo della pista il cui profilo appare nella figura 12-30, rotola senza slittamenti fino a cadere fuori al termine della pista. Se $H = 60$ m e $h = 20$ m, e l'ultimo tratto a destra della pista è orizzontale, a quale distanza orizzontale dal punto A andrà ad atterrare?

48 m



2E. Un cerchione di 140 kg rotola su un pavimento orizzontale con una velocità lineare del centro di massa di 0.150 m/s. Quanto lavoro si dovrà sviluppare su di esso per fermarlo? **−3.15 J**

3E. Un'automobile che viaggia a 80.0 km/h ha pneumatici con diametro di 75.0 cm. (a) Qual è la velocità angolare dei pneumatici intorno all'asse? (b) Se l'auto frena uniformemente fino ad arrestarsi dopo 30.0 giri dei pneumatici (senza slittamento) qual è l'accelerazione angolare delle ruote? (c) Che distanza copre l'auto durante la frenatura?

(a) 59.3 rad/s; (b) −9.31 rad/s^2; (c) 70.7 m

4E. Un'auto di 1000 kg ha quattro ruote di 10 kg. Quando si muove, quale parte dell'energia cinetica totale è da attribuire alla rotazione delle ruote intorno al proprio asse? Si ammette che le ruote abbiano lo stesso momento d'inerzia di dischi omogenei di uguale massa e dimensioni. Spiegate perché non occorre conoscere il raggio delle ruote.

[SOL: 0,020]

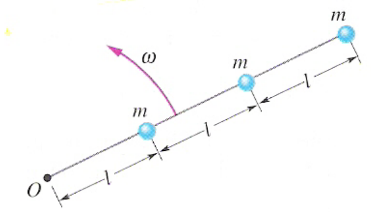
7P. Un corpo di raggio R e massa m rotola a velocità v, senza slittamenti, su un piano orizzontale. Prosegue rotolando su per una rampa fino a un'altezza massima h. (a) Se $h = 3v^2/4g$, qual è il momento d'inerzia del corpo? (b) Di che tipo di corpo si tratta?

[Sol: (½)mR^2]

39E. Il momento angolare di un volano con momento d'inerzia di 0.140 kg · m^2 diminuisce da 3.00 kg · m^2/s a 0.800 kg · m^2/s in 1.50 s. (a) Qual è il momento della forza media che agisce sul volano durante questo tempo? (b) Ammettendo un'accelerazione angolare uniforme, di quale angolo avrà ruotato il volano? (c) Quanto lavoro è stato svolto sul volano?

(a) −1.47 N · m; (b) 20.4 rad; (c) −29.9 J;

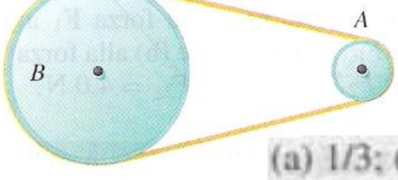
40E. Come risulta dalla figura , tre particelle, aventi ciascuna massa m, sono fissate fra loro e a un asse di rotazione per mezzo di tre funicelle prive di massa, ciascuna di lunghezza l. Il tutto ruota intorno all'asse di rotazione in O con velocità angolare ω, cosicché le tre particelle rimangono allineate. Quali sono, in funzione di m, l e ω, rispetto al punto O, (a) il momento d'inerzia del sistema, (b) il momento angolare della particella di mezzo e (c) il momento angolare totale delle tre particelle?



(a) 14 ml^2; (b) 4$ml^2\omega$ (c) 14 $ml^2\omega$

41P. Le ruote A e B della figura 12-37 sono accoppiate da una cinghia antislittamento. Il raggio della ruota B è triplo di quello della A. Quale sarebbe il rapporto dei momenti d'inerzia I_A/I_B se (a) le due ruote avessero lo stesso momento angolare e (b) se avessero la stessa energia cinetica rotazionale?

Suggerimento: *"in assenza di slittamento le velocità lineari alla periferia delle due ruote devono essere identiche......"*



(a) 1/3; (b) 1/9

FIGURA 12-37 Problema 41.

46E. Due dischi, montati su uno stesso asse munito di cuscinetti a basso attrito, possono essere avvicinati fino ad accoppiarsi e ruotare come un solo corpo. (a) Il primo disco, con momento d'inerzia di 3.3 $kg \cdot m^2$, gira a 450 giri/min, mentre il secondo, con momento d'inerzia di 6.6 $kg \cdot m^2$, gira a 900 giri/min nello stesso senso del primo. Quando si accoppiano, quale diventa la loro velocità angolare? (b) Se invece il secondo disco girasse sempre a 900 giri/min, ma in senso opposto al primo, quale sarebbe la velocità angolare risultante dopo l'accoppiamento? (a) 750 giri/min; (b) −450 giri/min

<u>ESERCIZIO</u> Un disco possiede un I = 0,0150 $Kg \cdot m^2$ e ruota a 3,0*giri/sec*. Un rivolo di sabbia cade sul disco a una distanza di 20*cm* dall'asse di rotazione, formando un anello di raggio 20*cm*. Quanta sabbia deve cadere sul disco per ridurne la velocità a 2,0*giri/sec*? [190g]

12P. Un giocatore di bowling lancia la palla di raggio $R = 11$ cm lungo la corsia. La palla scivola sulla corsia con velocità iniziale $v_{cdm,0} = 8.5$ m/s e velocità angolare iniziale $\omega_0 = 0$. Il coefficiente di attrito dinamico tra la palla e la corsia è 0.21. La forza di attrito dinamica $\mathbf{f}_k$ che agisce sulla palla (fig. 12-33) imprime un'accelerazione lineare alla palla e nello stesso tempo applica un momento della forza che imprime un'accelerazione angolare alla palla. Quando la velocità v_{cdm} è scesa opportunamente e la velocità angolare ω è cresciuta abbastanza, la palla cessa di strisciare e rotola dolcemente. (a) Come si può esprimere v_{cdm} in termini di ω? Durante lo slittamento quali sono (b) l'accelerazione lineare e (c) l'accelerazione angolare della palla? (d) Per quanto tempo la palla slitta? (e) Per quale distanza la palla slitta? (f) Qual è la velocità della palla quando inizia il rotolamento senza strisciare?

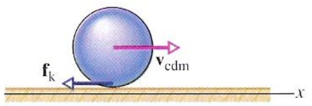


FIGURA 12-33 Problema 12.

DIFFICILE

12. (a) $(-0.11\ m)\ \omega$; (b) $-2.1\ m/s^2$; (c) $-47\ rad/s^2$; (d) 1.2 s; (e) 8.6 m; (f) 6.1 m/s