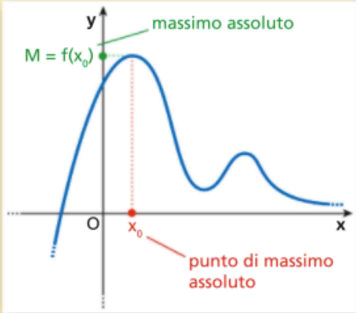
MASSIMI, MINIMI E FLESSI

Massimi e minimi assoluti

DEFINIZIONE

Data una funzione $y = f(x)$ il cui dominio è D, x_0 è il **punto di massimo assoluto** se $f(x) \leq f(x_0)$ per ogni $x \in D$. Il valore $f(x_0) = M$ è il **massimo assoluto** della funzione.



DEFINIZIONE

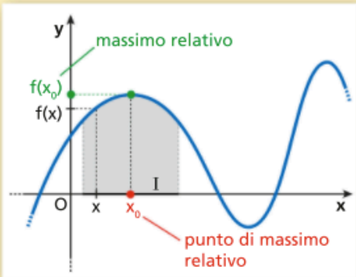
Data una funzione $y = f(x)$ il cui dominio è D, x_0 è il **punto di minimo assoluto** se $f(x) \geq f(x_0)$ per ogni $x \in D$. Il valore $f(x_0) = m$ è il **minimo assoluto** della funzione.

N.B. Se f(x) è continua in [a;b], esistono sicuramente *M* e *m* (Teor. di Weierstrass)

Massimi e minimi relativi

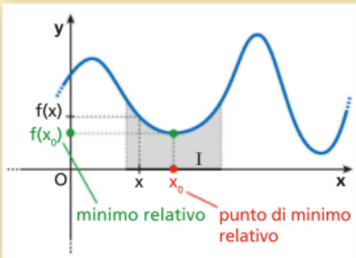
DEFINIZIONE

Data una funzione $y = f(x)$, definita in un intervallo $[a; b]$, $x_0 \in [a; b]$ è un **punto di massimo relativo** se esiste un intorno I del punto x_0 tale che $f(x_0) \geq f(x)$ per ogni x dell'intorno I.
Il valore $f(x_0)$ è detto **massimo relativo** della funzione in $[a; b]$.



DEFINIZIONE

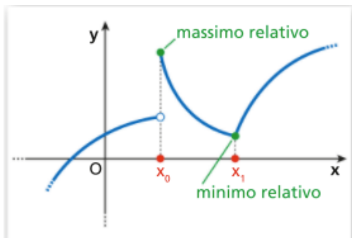
Data una funzione $y = f(x)$, definita in un intervallo $[a; b]$, $x_0 \in [a; b]$ è un **punto di minimo relativo** se esiste un intorno I del punto x_0 tale che $f(x_0) \leq f(x)$ per ogni x dell'intorno I.
Il valore $f(x_0)$ è detto **minimo relativo** della funzione in $[a; b]$.



I punti di massimo e di minimo relativi si chiamano anche **punti estremanti relativi** di f(x).

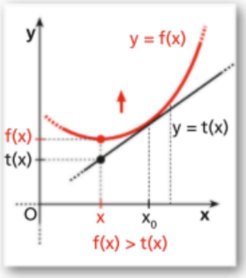
N.B. Un punto di estremo assoluto è anche un punto di estremo relativo, ma non è sempre vero il contrario.

Nelle definizioni date non è richiesta la continuità o la derivabilità della funzione f(x): ci può essere un punto di estremo relativo o assoluto in un punto di non continuità o di non derivabilità!



Concavità

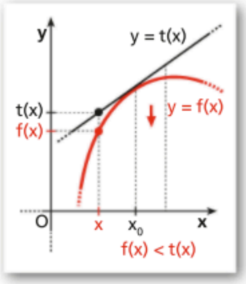
Siano date la funzione $y = f(x)$, definita e derivabile nell'intervallo $]a; b[$, e la retta di equazione $y = t(x)$, tangente al grafico di $f(x)$ nel suo punto di ascissa x_0, interno all'intervallo $]a; b[$. Poiché $f(x)$ è derivabile in $]a; b[$, la retta tangente esiste in ogni punto.



DEFINIZIONE
Diciamo che in x_0 la funzione $f(x)$ ha la **concavità rivolta verso il semiasse positivo delle y (verso l'alto)** se esiste un intorno completo I di x_0 tale che, per ogni x appartenente all'intorno e diverso da x_0, la funzione assume valori maggiori di quelli di $t(x)$ nei punti aventi la stessa ascissa, ossia:

$$f(x) > t(x) \quad \forall x \in I \ \wedge \ x \neq x_0.$$

Questo significa che $f(x)$ è concava verso l'alto in x_0 se il suo grafico, in un intorno di x_0, si trova al di sopra della retta tangente.



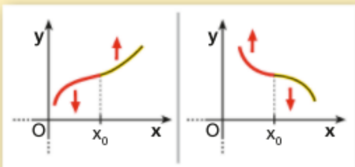
DEFINIZIONE
Diciamo che in x_0 la funzione $f(x)$ ha la **concavità rivolta verso il semiasse negativo delle y (verso il basso)** se esiste un intorno completo I di x_0 tale che, per ogni x appartenente all'intorno e diverso da x_0, la funzione assume valori minori di quelli di $t(x)$ nei punti aventi la stessa ascissa, ossia:

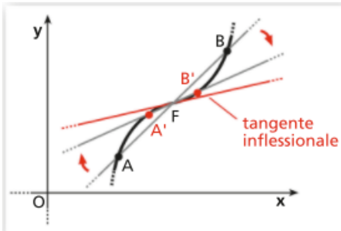
$$f(x) < t(x) \quad \forall x \in I \ \wedge \ x \neq x_0.$$

Questo significa che $f(x)$ è concava verso il basso in x_0 se il suo grafico, in un intorno di x_0, si trova al di sotto della retta tangente.
Dato un intervallo$]a; b[$, diciamo che il grafico ha la concavità verso l'alto (oppure verso il basso) **nell'intervallo**, se ha la concavità verso l'alto (o verso il basso) in ogni punto interno dell'intervallo.

Flessi

DEFINIZIONE
Data la funzione $y = f(x)$ definita e continua in $]a; b[$, diciamo che presenta in x_0, interno a $]a; b[$, un punto di **flesso** se in tale punto il grafico di $f(x)$ cambia concavità.





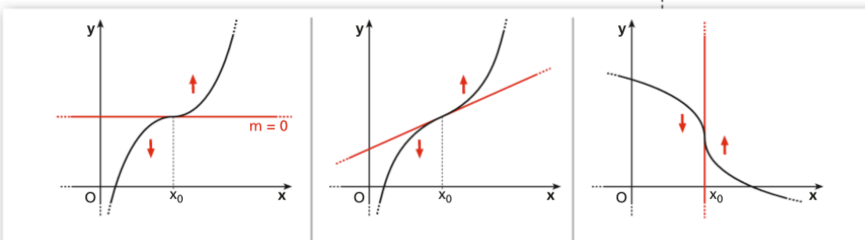
La tangente in un punto di flesso si chiama **rette tangente inflessionale**; ha la caratteristica di attraversare la curva (il punto di tangenza è un "punto triplo" ossia un punto con tre intersezioni coincidenti)

Se in un punto di flesso esiste la retta tangente, il flesso viene detto:

- **orizzontale** se la tangente nel punto di flesso è parallela all'asse x;
- **verticale** se la tangente è parallela all'asse y;
- **obliquo** se la tangente non è parallela a uno degli assi.

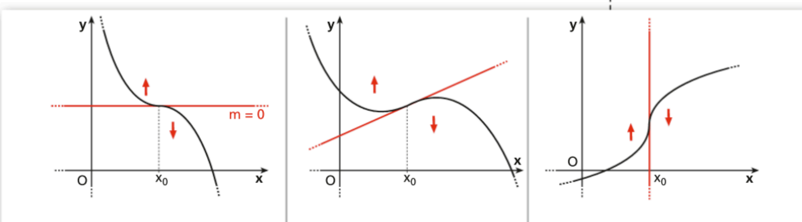
Se esiste un intorno del punto di flesso in cui il grafico della funzione ha:

- concavità verso il basso a sinistra del punto di flesso e verso l'alto a destra, il flesso è **ascendente**;



a. x_0 è punto di flesso orizzontale ascendente.
b. x_0 è punto di flesso obliquo ascendente.
c. x_0 è punto di flesso verticale ascendente.

- concavità verso l'alto a sinistra del punto di flesso e verso il basso a destra, il flesso è **discendente**.



a. x_0 è punto di flesso orizzontale discendente.
b. x_0 è punto di flesso obliquo discendente.
c. x_0 è punto di flesso verticale discendente.

Massimi, minimi e flessi orizzontali - DERIVATA PRIMA

Riprendiamo il **Teorema di Fermat** (1607-1665) sui punti stazionari.

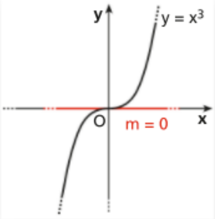
IPOTESI
$f(x)$ definita in $[a; b]$
$f(x)$ derivabile in $]a; b[$
$f(x)$ ha in x_o un massimo o un minimo relativo, con $x_0 \in \,]a; b[$

TESI
$f'(x_0) = 0$ cioè x_0 è un punto stazionario per la funzione.
Geometricamente: la retta tangente in un punto di massimo o di minimo relativo, non estremo dell'intervallo, è parallela all'asse x.

OSSERVAZIONI

1) Il teorema di Fermat fornisce una condizione necessaria per l'esistenza di un massimo/minimo relativo in un punti interno all'intervallo MA tale condizione non è sufficiente:

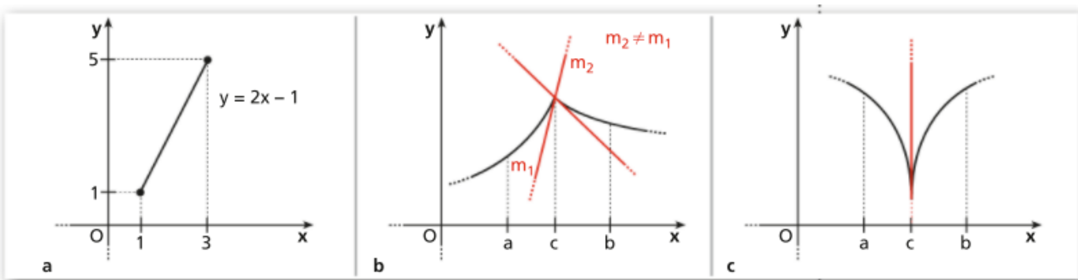
$$x_0 \max/\min \; interno \Longrightarrow f'(x_0) = 0$$
$$f'(x_0) = 0 \; \not\Rightarrow \; x_0 \max/\min \; interno$$



ES. $y = x^3$
$x = 0$ è punto stazionario ma non è estremante relativo (ma è flesso a tangente orizzontale)

$y' = 3x^2 > 0 \qquad \forall x \neq 0$

2) Il teorema di Fermat parla di *punti interni* all'intervallo… ma gli estremanti relativi possono essere anche negli estremi di un intervallo o anche in punti di non derivabilità:

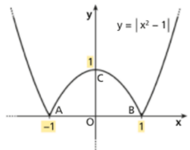


Caso a: in x=1 e x=3 ci sono estremi relativi con derivata prima non nulla in tali punti estremi.
Casi b e c: in x=c c'è un punto angoloso e un punto di cuspide, ma la derivata non è nulla in tali punti.

Quindi…
Data $y = f(x)$ definita in $[a; b]$, i possibili punti estremanti vanno ricercati tra:

- punti in cui $f'(x) = 0$
- gli estremi dell'intervallo (cioè in *x=a* e *x=b*)
- i punti in cui la funzione non è derivabile

Es. $y = |x^2 - 1|$

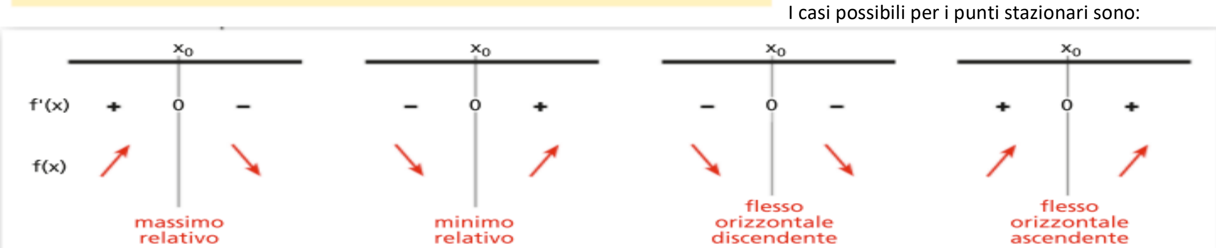


In sintesi

Data una funzione $f(x)$ continua, per la **ricerca dei massimi e dei minimi relativi e dei flessi orizzontali** con lo studio del segno della derivata prima:

- calcoliamo $f'(x)$ e determiniamo il suo dominio per trovare gli eventuali punti in cui la funzione non è derivabile (cuspidi, flessi verticali, punti angolosi);
- risolviamo l'equazione $f'(x) = 0$ per trovare i punti stazionari;
- studiamo il segno di $f'(x)$ per trovare i punti di massimo e minimo *relativo* (anche non stazionari) e i punti di flesso a tangente orizzontale.

I casi possibili per i punti stazionari sono:



N.B. In corrispondenza di un punto di flesso a tangente orizzontale la derivata prima è nulla (è un punto stazionario), ma il segno della derivata prima stessa non cambia nell'intorno del punto stesso!

Se inoltre dobbiamo trovare **il massimo e il minimo *assoluti***:

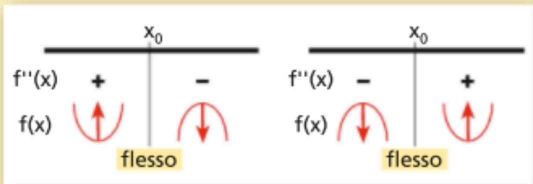
- se la funzione $f(x)$ è continua e l'intervallo I di definizione della funzione è chiuso e limitato, il teorema di Weierstrass assicura l'esistenza di massimo e minimo assoluti; per determinarli si confrontano le ordinate dei punti di massimo e minimo relativi tra di loro e con i valori che $f(x)$ assume negli estremi dell'intervallo: il valore maggiore corrisponde al punto di massimo assoluto e quello minore corrisponde al punto di minimo assoluto;
- se l'intervallo I non è chiuso o non è limitato, massimo e minimo assoluti potrebbero non esistere. In questo caso, oltre allo studio degli eventuali punti stazionari e di non derivabilità, si calcolano i limiti della funzione agli estremi di I, finiti o infiniti.

Flessi - DERIVATA SECONDA

Flessi e derivata seconda

- **Condizione sufficiente per stabilire la concavità**
  Se $y = f(x)$ è una funzione definita e continua in un intervallo I, insieme con le sue derivate prima e seconda, in x_0, punto interno di I, il grafico della funzione volge:
  - la concavità verso l'alto se $f''(x_0) > 0$;
  - la concavità verso il basso se $f''(x_0) < 0$.
- **Condizione necessaria per i flessi**
  Sia $y = f(x)$ una funzione definita in un intervallo $[a; b]$ e tale che esistano le sue derivate prima e seconda. Se $f(x)$ ha un flesso nel punto x_0, interno ad $[a; b]$, la derivata seconda della funzione in quel punto si annulla, cioè: $f''(x_0) = 0$.
- **Condizione sufficiente per i flessi**
  Sia data la funzione $y = f(x)$ definita e continua in un intorno completo I del punto x_0 e tale che esistano le sue derivate prima e seconda per ogni $x \in I$, $x \neq x_0$.
  Se per ogni $x \neq x_0$ dell'intorno si ha
  - $f''(x) > 0$ per $x < x_0$ e $f''(x) < 0$ per $x > x_0$, oppure
  - $f''(x) < 0$ per $x < x_0$ e $f''(x) > 0$ per $x > x_0$,

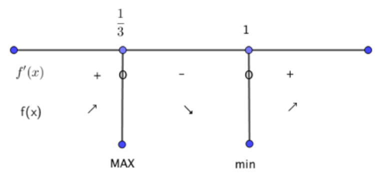
  allora x_0 è un punto di flesso.



Esempio 1

$y = f(x) = x^3 - 2x^2 + x$ Dominio=$\mathbb{R}$

$y' = 3x^2 - 4x + 1$ $y' = 0\ per\ x = 1 \vee x = 1/3$ Studio derivata prima:



In x=1 e x=1/3 ci sono estremanti relativi:

$y(1) = 0; y\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{4}{27} \cong 0.148 \quad \Rightarrow \quad M\left(\frac{1}{3}; \frac{4}{27}\right) \max rel; \quad m(1;0) \min rel$

$y'' = 6x - 4$ $y'' = 0\ per\ x = 2/3$ Studio derivata seconda:

In x=2/3 c'è un punto di flesso (ascendente) a tangente obliqua;

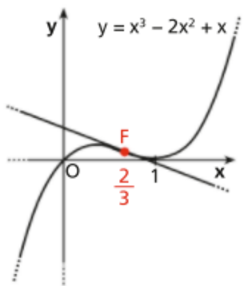
$y\left(\frac{2}{3}\right) = \frac{2}{27} \cong 0{,}07 \quad \Rightarrow \quad F\left(\frac{2}{3}; \frac{2}{27}\right)$ flesso a tg obliqua

Equazione della **retta tangente inflessionale:**

$$y - \frac{2}{27} = y'\left(\frac{2}{3}\right) \cdot \left(x - \frac{2}{3}\right)$$

Con $y'\left(\frac{2}{3}\right) = -\frac{1}{3} \cong -0{,}33$

Grafico della funzione:

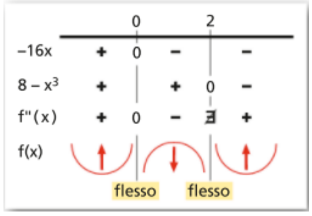


Esempio 2

$y = \sqrt[3]{8-x^3}$ Dominio=$\mathbb{R}$ $y' = \dots = \frac{-x^2}{\sqrt[3]{(8-x^3)^2}}$ $y'' = \dots = \frac{-16x}{(8-x^3)\cdot\sqrt[3]{(8-x^3)^2}}$ Dominio y' e y'' = $\mathbb{R} - \{2\}$

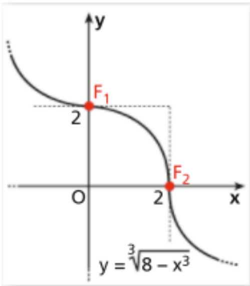
Lo studio della derivata prima evidenzia che la funzione ha in *x=0* un punto stazionario ed è sempre decrescente in $\mathbb{R}$

Lo studio della derivata seconda:



In x=0 la funzione ha un flesso (discendente) a tangente orizzontale
mentre in x=2 ha un flesso (ascendente) ma a tangente verticale poiché $\lim_{x \to 2} f'(x) = -\infty$

Grafico della funzione:



In sintesi

Data una funzione $f(x)$, continua e derivabile, per la **ricerca dei flessi**:

- calcoliamo la derivata seconda $f''(x)$ e determiniamo il suo dominio;
- studiamo il segno di $f''(x)$ e cerchiamo i punti in cui la concavità cambia, ossia i punti di flesso;
- se x_0 è un punto di flesso e:

  $f'(x_0) = 0$, il flesso è **orizzontale**;

  $f'(x_0) \neq 0$, il flesso è **obliquo**.

Se la funzione $f(x)$ non è derivabile in x_0 dove $f''(x)$ cambia segno, allora, quando $\lim_{x \to x_0} f'(x) = +\infty$ oppure $\lim_{x \to x_0} f'(x) = -\infty$, in x_0 c'è un flesso **verticale**.

Massimi, Minimi e Flessi - METODO DELLE DERIVATE SUCCESSIVE (sintesi)

Tale metodo si può essere utile nei casi in cui lo studio del segno della derivata prima si presenti difficoltoso.

In sintesi

Per determinare i massimi e i minimi relativi e i flessi, con il metodo delle derivate successive, procediamo in questo modo:

- calcoliamo la derivata prima $f'(x)$ e troviamo gli zeri $x_1, x_2, \dots$ di questa funzione;
- per ogni x_i calcoliamo i valori che assumono le derivate successive; se la prima derivata $f^{(n)}(x)$ che non si annulla in x_i è di ordine pari, allora x_i è un punto di massimo o di minimo relativo, mentre se è di ordine dispari in x_i si ha un flesso orizzontale;
- cerchiamo gli zeri $z_1, z_2, \dots$ della derivata seconda $f''(x)$;
- per ogni z_i calcoliamo i valori che assumono le derivate successive; se la prima derivata $f^{(n)}(x)$ che non si annulla in z_i è di ordine dispari, allora in z_i si ha un flesso obliquo.

- Se la prima derivata $f^{(n)}(x)$ che non si annulla in z_i è di ordine pari si ha:
  $f^{(n)}(z_i) > 0 \Rightarrow$ in z_i la funzione è concava verso l'alto
  $f^{(n)}(z_i) < 0 \Rightarrow$ in z_i la funzione è concava verso il basso

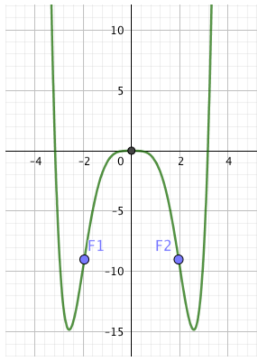
Esempio

$y = \frac{1}{10}x^6 - x^4$ $y' = \frac{3}{5}x^5 - 4x^3$ $y'' = 3x^4 - 12x^2$ $y''' = 12x^3 - 24x$ $y^{(4)} = 36x^2 - 24 \dots$

$y' = 0 \Rightarrow x = 0 \vee x = \pm\sqrt{\frac{20}{3}}$ Studiamo x=0 $y''(0) = 0$ $y'''(0) = 0$ $y^{(4)}(0) = -24 < 0$

Quindi in x=0 c'è un massimo relativo. Studiamo $x = \pm\sqrt{\frac{20}{3}}$ Qui ci sono due minimi relativi perché $y''\left(\pm\sqrt{\frac{20}{3}}\right) > 0$

Studiamo gli zeri della derivata seconda per i flessi: $y'' = 0 \Longrightarrow x = 0 \vee x = \pm\sqrt{2}$
Si ha: $y'''(-2) < 0$ mentre $y'''(+2) > 0$. Allora in x=-2 c'è un flesso obliquo (discendente) mentre in x=+2 c'è un flesso obliquo (ascendente)
Grafico della funzione:



PROBLEMI DI OTTIMIZZAZIONE (problemi di massimo e di minimo)

Per risolvere problemi di ottimizzazione:

- cerchiamo la **funzione obiettivo** da rendere massima o minima;
- poniamo le **condizioni** (o **vincoli**) relative alla variabile indipendente;
- determiniamo i massimi o i minimi della funzione;
- fra i valori trovati, accettiamo solo quelli che soddisfano le condizioni poste.

SCHEMA GENERALE PER LO STUDIO DI UNA FUNZIONE

1. Determinare il **dominio** D_f della funzione
   1.1. Nel caso in cui il dominio della funzione sia simmetrico rispetto all'origine, si controlla se la funzione è **pari o dispari**:
   - f è pari ⇔ $f(-x)=f(x), \forall x \in D_f$ e quindi ha grafico simmetrico rispetto all'asse y
   - f è dispari ⇔ $f(-x)=-f(x), \forall x \in D_f$ e quindi ha grafico simmetrico rispetto all'origine

   Nel caso la funzione sia pari o dispari, nelle varie fasi dello studio potremo tenere presente la simmetria.

   1.2. Controllare se la funzione è **periodica** cioè se $f(x+T)=f(x), \forall x \in D_f$ In caso affermativo, basterà studiarla su di un intervallo di ampiezza T (essendo T il periodo).

2. Determinare le **intersezioni con gli assi**
   - Per l'eventuale intersezione con l'asse verticale si porrà x=0 (se x=0 appartiene al dominio!) e si ricaverà il corrispondente valore di y.
   - Per le eventuali intersezioni con l'asse orizzontale si dovrà risolvere l'equazione $f(x)=0$.

3. Studiare il **segno** della funzione mediante la disequazione $f(x)>0$, ricavando di conseguenza gli intervalli di positività e di negatività della funzione stessa.

4. Calcolare i **limiti** della funzione agli estremi finiti, se esistono, del dominio da cui si deducono gli eventuali *asintoti verticali*; se il dominio è illimitato, si calcolano i limiti all'infinito, determinando se vi sono *asintoti orizzontali* o *asintoti obliqui*.

   Ai fini del grafico finale, determinare le eventuali intersezioni degli asintoti orizzontali e obliqui con il grafico della funzione.

5. Calcolare la **derivata prima** $f'(x)$, determinandone il Dominio $D_{f'}$

   Tale dominio D_f' potrebbe essere più ristretto del dominio D_f della funzione; ciò significherebbe che in certi punti la funzione esiste, ma non è derivabile.
   Si potrà trattare di: flessi verticali, cuspidi, punti angolosi... Usando il "criterio di derivabilità", calcolare i limiti della y' quando x tende ai confini di D_f' per classificarli.

   Risolvere l'equazione $f'(x)=0$ per trovare i "punti stazionari", punti in cui la tangente al grafico è parallela all'asse x e si calcolano le corrispondenti ordinate.

   Studiare il segno della derivata prima, risolvendo la disequazione $f'(x)>0$ stabilendo così in quali intervalli la funzione è:
   ⇒ crescente (y'>0 implica retta tangente in salita, funzione crescente)
   ⇒ decrescente (y'<0 implica retta tangente in discesa, funzione decrescente)
   Si determineranno così i punti di **massimo** e di **minimo** relativo interni al dominio e anche i **flessi a tangente orizzontale**.

6. Calcolare la **derivata seconda** $f''(x)$
   Risolvere l'equazione $f''(x)=0$; questa equazione fornisce, in generale, le ascisse dei punti di flesso (ricordare però che non tutti i punti in cui si annulla y'' risultano punto di flesso e d'altra parte si possono avere pure dei flessi in cui y'' non si annulla (basti pensare ai flessi a tangente verticale). Calcolare le corrispondenti ordinate dei punti trovati.

   Studiare il segno della derivata seconda, risolvendo la disequazione $f''(x)>0$ stabilendo così gli intervalli in cui la funzione:
   ⇒ y'' > 0 implica y' crescente, quindi y concava (funzione concava verso l'alto)
   ⇒ y'' < 0 implica y' decrescente, quindi y convessa (funzione concava verso il basso)

   I punti di flesso che si trovano sono flessi a tangente orizzontale solo se le ascisse di tali punti annullano sia la derivata seconda che la derivata prima, altrimenti sono flessi a tangente obliqua.
   Per una maggiore precisione del disegno è spesso utile determinare la cosiddetta retta *tangente inflessionale* ossia la retta tangente al grafico della curva negli eventuali punti di flesso obliqui ($m_{tg\,\text{inflessionale}}=f'(x_{flesso})$).

7. Raccogliere tutti gli elementi trovati nei punti precedenti in un piano cartesiano ortogonale che alla fine conterrà un **grafico probabile della funzione** in esame. E' consigliabile visualizzare i diversi risultati via via che si ottengono; in tal modo il grafico verrà costruito a poco a poco. Potrà anche essere utile calcolare le coordinate di altri punti che si ritengono importanti per un disegno più accurato.

Osservazioni:

- Per il calcolo dei massimi, dei minimi e dei flessi delle funzioni derivabili si può anche ricorrere al Metodo delle Derivate Successive, specie quando la risoluzione delle disequazioni coinvolte risulta troppo laboriosa. Per lo studio di alcune funzioni con derivata seconda complicata ci si ferma invece allo studio della derivata prima.
- Può accadere che una o più delle equazioni che ci si trova a dover risolvere ($f(x)=0$, $f'(x)=0$, $f''(x)=0$ o anche le corrispondenti disequazioni) non sia risolubile per via elementare. In tal caso ci si accontenterà di procedere graficamente localizzando le eventuali radici in opportuni intervalli; con il *metodo di bisezione* o con il *metodo delle tangenti* si potrà poi determinare un'approssimazione di queste radici.

Le funzioni polinomiali,

$y = a_n x^n + \ldots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$, con $n \in \mathbb{N}$, quando $n > 2$,

- hanno come dominio $\mathbb{R}$;
- non hanno punti di discontinuità;
- non hanno asintoti;
- non hanno cuspidi, flessi verticali o punti angolosi;
- se sono funzioni dispari, hanno un flesso in $O(0; 0)$;
- se sono funzioni pari, $x = 0$ è un punto di massimo o di minimo relativo.

Le funzioni razionali fratte,

$$y = \frac{a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_0}{b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \ldots + b_0} = \frac{A(x)}{B(x)},$$

- hanno come dominio $\mathbb{R}$ con esclusione dei valori che annullano $B(x)$;
- possono avere asintoti verticali che vanno ricercati fra i valori che annullano $B(x)$;
- intersecano l'asse x nei punti in cui $A(x) = 0$;
- se $n = m$, hanno un asintoto orizzontale di equazione $y = \frac{a_n}{b_m}$;
- se $n < m$, hanno come asintoto orizzontale l'asse x;
- se $n > m$, con $n - m = 1$, hanno un asintoto obliquo.

Le funzioni irrazionali sono quelle che contengono radicali nei cui radicandi compare la variabile indipendente. Se i radicali sono di indice pari, dal dominio si escludono i valori che rendono negativi i radicandi.

Le funzioni logaritmiche:

- hanno come dominio l'insieme dei valori di $\mathbb{R}$ che rendono positivo l'argomento del logaritmo;
- se sono funzioni del tipo $y = \log \frac{A(x)}{B(x)}$, possono presentare asintoti verticali per i valori che annullano o $A(x)$ o $B(x)$.

Le funzioni goniometriche:

- sono quasi sempre periodiche, e in questo caso basta studiarle in un periodo;
- se sono periodiche, non presentano asintoti orizzontali o obliqui; possono avere solo asintoti verticali.