ESERCIZI SVOLTI SULLA SCOMPOSIZIONE TRAMITE "RACCOGLIMENTI TOTALE E PARZIALE"

ESERCIZIO 1

Il nostro compito consiste nell'usare la tecnica del raccoglimento totale per scomporre i polinomi

$$-x^2+3x \quad , \quad 2-6x \quad \text{e} \quad -2x^3+x^2$$

Tale tecnica di scomposizione prevede di mettere in evidenza il fattore comune a tutti i termini di un polinomio e di esprimere quest'ultimo come prodotto fra il fattore comune e il quoziente tra il polinomio dato e il fattore messo in evidenza.

Dal punto di vista pratico, useremo le proprietà delle potenze, e in particolare la regola del quoziente di due potenze con la stessa base, per aiutarci nei vari calcoli.

(a) Consideriamo il polinomio $-x^2+3x$, il fattore comune ai suoi termini è x, per cui possiamo metterlo in evidenza, dividendo sia $-x^2$ che $3x$ per x

$$-x^2+3x=x(-x^{2-1}+3x^{1-1})=$$

$$=x(-x+3)$$

Fatto!

(b) Nel binomio $2-6x$, l'unico fattore comune a entrambi gli addendi è 2: mettendolo in evidenza, dividiamo per 2 i coefficienti del polinomio dato.

$$2-6x=2(1-3x)$$

Abbiamo terminato.

(c) Occupiamoci del polinomio $-2x^3+x^2$. Il fattore comune a entrambi i termini che lo compongono è x^2, per cui:

$$-2x^3+x^2=x^2(-2x^{3-2}+x^{2-2})=x^2(-2x+1)$$

Ecco fatto!

ESERCIZIO 2

Usare la tecnica del raccoglimento totale per fattorizzare i seguenti polinomi:

$(a) \quad 4a^5 + 12a^3$

$(b) \quad 4mn^2 - 6m^2n$

$(c) \quad 8axy - 6a^2x$

L'esercizio ci chiede di scomporre 3 polinomi suggerendoci anche la tecnica di fattorizzazione da usare: il metodo del raccoglimento totale.

Se i termini di un polinomio sono divisibili per uno stesso fattore, il polinomio si può esprimere come prodotto del fattore per un nuovo polinomio formato dai quozienti delle divisioni tra i termini del polinomio dato e il fattore messo in evidenza.

In effetti la regola è un po' contorta, però nella pratica è sufficiente affidarsi alle proprietà delle potenze, e in particolare alla regola sul quoziente di due potenze con la stessa base.

Dopo il brevissimo preambolo teorico, possiamo occuparci dell'esercizio: dobbiamo scomporre i polinomi

$(a) \quad 4a^5 + 12a^3$

$(b) \quad 4mn^2 - 6m^2n$

$(c) \quad 8axy - 6a^2x$

cominciando dal primo.

(a) Consideriamo il binomio $4a^5 + 12a^3$, i cui termini sono $4a^5$ e $12a^3$. Il fattore comune ai due termini ha:

- per coefficiente il massimo comun divisore dei coefficienti 4 e 12 che è 4.

- per parte letterale, il prodotto delle lettere comuni, ciascuna presa con il più piccolo esponente: in questa occasione, la lettera comune è a e l'esponente da attribuirle è 3.

In definitiva, il fattore comune è $4a^3$ e in virtù della regola per il raccoglimento totale, scriviamo:

$$4a^5 + 12a^3 = 4a^3[4a^5 : (4a^3) + 12a^3 : (4a^3)] =$$

$$= 4a^3(a^{5-3} + 3a^{3-3}) =$$

$$= 4a^3(a^2 + 3)$$

Il primo è andato.

(b) Esaminiamo il polinomio $4mn^2 - 6m^2n$. Il fattore comune ai suoi termini è il monomio avente per coefficiente il massimo comune divisore di 4 e -6 e per parte letterale il prodotto delle lettere comuni ai termini, ciascuna presa con l'esponente minore, vale a dire $2mn$.

In base alla regola, il polinomio si fattorizza svolgendo i seguenti passaggi

$$4mn^2 - 6m^2n = 2mn[4mn^2 : (2mn) - 6m^2n : (2mn)] =$$

Grazie alle proprietà delle potenze, e in particolare grazie alla regola sul quoziente di due potenze con la stessa base, l'espressione diventa:

$$= 2mn[2m^{1-1}n^{2-1} - 3m^{2-1}n^{1-1}] =$$

$$= 2mn[2n - 3m]$$

(c) Analizziamo il polinomio $8axy-6a^2x$ e determiniamo il fattore comune ai termini $8axy$ e $-6a^2x$.

Il coefficiente del fattore comune è dato dal massimo comune divisore tra i coefficienti 8 e 6 ed è chiaramente 2. La parte letterale del fattore comune è invece uguale al prodotto delle lettere comuni ai termini, ciascuna presa con il più piccolo esponente.

In definitiva, il fattore comune ai termini del polinomio è $2ax$ e in virtù della regola per il raccoglimento totale, scriviamo:

$$8axy-6a^2x=2ax[(8axy):(2ax)-6a^2x:(2ax)]=$$

Svolgiamo le divisioni tra i monomi, attenendoci alla regola del quoziente di due potenze nel momento in cui operiamo con le parti letterali.

$$=2a^2x[4a^{1-1}x^{1-1}y-3a^{2-1}x^{1-1}]=$$

$$=2a^2x[4y-3a]$$

Ecco fatto!

Prima di mettere un punto definitivo all'esercizio, è opportuno evidenziare che molti dei passaggi effettuati possono essere saltati una volta acquisito il metodo.

ESERCIZIO 3

L'esercizio ci chiede di usare la tecnica del raccoglimento totale per fattorizzare il polinomio

$$\frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{2}x^2y =$$

Prima di procedere con la scomposizione, è opportuno esprimere i coefficienti dei monomi a denominatore comune

$$= \frac{x^4 + 2x^2y}{4} =$$

e scomporre il polinomio $x^4 + 2x^2y$. Analizziamo i termini che lo compongono, x^4 e $2x^2y$, così da ricavare il loro fattore comune.

Ricordiamo che il fattore comune ha per coefficiente il massimo comune divisore tra i coefficienti e per parte letterale il prodotto delle lettere comuni a entrambi i termini, ciascuna elevata all'esponente più piccolo con cui figura nel polinomio.

In accordo con la teoria, il fattore comune a x^4 e $2x^2y$ è x^2: non ci resta che metterlo in evidenza e dividere $x^4 + 2x^2y$ per x^2

$$\frac{x^4 + 2x^2y}{4} = \frac{x^2[x^4 : (x^2) + 2x^2y : (x^2)]}{4} =$$

Svolgiamo le divisioni tra i monomi, avvalendoci delle proprietà delle potenze nel momento in cui operiamo con le parti letterali e scriviamo infine la scomposizione associata.

$$= \frac{x^2[x^{4-2} + 2x^{2-2}y]}{4} = \frac{x^2(x^2 + 2y)}{4}$$

Abbiamo finito!

ESERCIZIO 4

Il nostro compito consiste nell'usare il metodo del raccoglimento totale per fattorizzare il polinomio

$$2(a+b)+3x(a+b)$$

Per prima cosa analizziamo i termini che lo compongono, vale a dire:

$$2(a+b) \quad \text{e} \quad 3x(a+b)$$

Essi condividono il fattore $a+b$, per cui siamo autorizzati a esprimere il polinomio dato come prodotto tra $a+b$ e un altro polinomio i cui termini si ottengono dividendo $2(a+b)$ e $3x(a+b)$ per il fattore comune $a+b$. Scriviamo:

$$2(a+b)+3x(a+b)=(a+b)[2(a+b):(a+b)+3x(a+b):(a+b)]=$$

Per esplicitare la divisione $(a+b):(a+b)$, basta avvalersi delle proprietà delle potenze e, in particolare, della regola sul quoziente di due potenze con la stessa base.

$$=(a+b)[2(a+b)^{1-1}+3x(a+b)^{1-1}]=$$

$$=(a+b)[2(a+b)^{0}+3x(a+b)^{0}]=$$

Ricordando che un numero (non nullo) elevato a 0 è uguale a 1, la precedente espressione diventa

$$=(a+b)[2+3x]$$

È opportuno sottolineare che molti dei passaggi riportati hanno il compito di mettere in chiaro come funziona il metodo del raccoglimento totale e possono essere tranquillamente bypassati. Nelle verifiche basta riportare il passaggio:

$$2(a+b)+3x(a+b)=(a+b)(2+3x)$$

Ecco fatto!

ESERCIZIO 5

Fattorizzare il seguente polinomio, usando l'opportuna tecnica di scomposizione.

$$x^2y(x+y)^2 + 2xy^2(x+y)$$

Prima di dedicarci alla risoluzione dell'esercizio, esaminiamo gli addendi del polinomio

$$x^2y(x+y)^2 + 2xy^2(x+y)$$

vale a dire $x^2y(x+y)^2$ e $2xy^2(x+y)$, e osserviamo che vi sono alcuni fattori comuni. Ciò ci suggerisce che la tecnica di scomposizione utile a portare a termine l'esercizio è il metodo del raccoglimento totale.

In questa circostanza, il fattore comune è dato dal prodotto delle lettere comuni agli addendi, ciascuna presa con il più piccolo esponente, e del binomio $x+y$, anch'esso elevato all'esponente più piccolo, cioè $xy(x+y)$.

Riallacciandoci alla teoria, il polinomio iniziale si esprime come prodotto tra il fattore comune e il polinomio formato dai quozienti delle divisioni tra gli addendi e il fattore comune.

Dal punto di vista operativo, ci avvarremo delle proprietà delle potenze, e in particolare della regola sul quoziente di due potenze con la stessa base nel momento in cui esplicitiamo la divisione tra gli addendi e il fattore ottenuto.

$$x^2y(x+y)^2 + 2xy^2(x+y) =$$

$$= xy(x+y)\left[x^{2-1}y^{1-1}(x+y)^{2-1} + 2x^{1-1}y^{2-1}(x+y)^{1-1}\right] =$$

$$= xy(x+y)[xy^0(x+y) + 2y(x+y)^0] =$$

Le potenze con esponente nullo sono per convenzione uguali a uno, per cui l'espressione diventa:

$$= xy(x+y)[x(x+y) + 2y] =$$

Non ci resta altro da fare se non moltiplicare x per il binomio $x+y$ e mettere un punto all'esercizio.

$$= xy(x+y)[x^2 + xy + 2y]$$

Ecco fatto!

ESERCIZIO 6

Usare l'opportuna tecnica di scomposizione per fattorizzare il seguente polinomio

$$a^2b(a-b)+3a^3b(a-b)+4ab^2(a-b)$$

Per risolvere l'esercizio, analizziamo meticolosamente gli addendi del polinomio:

$$a^2b(a-b)+3a^3b(a-b)+4ab^2(a-b)$$

vale a dire:

$$a^2b(a-b) \quad , \quad 3a^3b(a-b) \quad \text{e} \quad 4ab^2(a-b)$$

In ciascuno di essi figurano le lettere a e b e il binomio $a-b$, pertanto è opportuno avvalersi del metodo del raccoglimento totale.

Esso consta di due passaggi e prevede di:

- ricavare il fattore comune, formato dal prodotto dei termini che figurano in tutti gli addendi del polinomio dato, ciascuno preso con il più piccolo esponente; per quanto concerne la gestione dei coefficienti, invece, considereremo il loro massimo comun divisore. Nel caso in esame, il fattore comune è $ab(a-b)$.

- Esprimere il polinomio iniziale come prodotto tra il fattore comune e il polinomio quoziente della divisione tra il polinomio dato e il fattore.

Dal punto di vista operativo non occorre effettuare esplicitamente le divisioni, bensì basta rifarsi alle proprietà delle potenze, e in particolare alla regola sul quoziente di due potenze con la stessa base.

$$a^2b(a-b)+3a^3b(a-b)+4ab^2(a-b)=$$

$$=ab(a{-}b)\left[a^{2-1}b^{1-1}(a-b)^{1-1}+3a^{3-1}b^{1-1}(a-b)^{1-1}+4a^{1-1}b^{2-1}(a-b)^{1-1}\right]=$$

$$=ab(a-b)\left[ab^0(a-b)^0+3a^2b^0(a-b)^0+4a^0b^1(a-b)^0\right]=$$

Tenendo a mente la convenzione secondo cui una potenza con esponente nullo e base diversa da zero è pari a uno, l'espressione diventa:

$$=ab(a-b)\left[a+3a^2+4b\right]$$

Si noti che molti dei passaggi riportati possono essere evitati, una volta acquisite la sicurezza e la maturità nello svolgere i calcoli a mente. In un'ipotetica verifica, basta riportare l'uguaglianza:

$$a^2b(a-b)+3a^3b(a-b)+4ab^2(a-b)=ab(a-b)\left[a+3a^2+4b\right]$$

Ecco fatto!

ESERCIZIO 7

Utilizzare il metodo del raccoglimento parziale per scomporre il seguente polinomio

$ax + bx + az + bz$

Il nostro compito consiste nello scomporre il polinomio

$$ax + bx + az + bz$$

avvalendoci del metodo del raccoglimento parziale. Per prima cosa esaminiamo i monomi che vi figurano

$$ax \quad , \quad bx \quad , \quad az \quad , \quad bz$$

dopodiché osserviamo che i primi due termini, ax e bx, condividono il fattore x, mentre gli ultimi due, az e bz, hanno in comune la lettera z: mettendoli in evidenza, polinomio

$$ax + bx + az + bz =$$

diventa

$$= x(a + b) + z(a + b) =$$

Poiché negli addendi $x(a + b)$ e $z(a + b)$ figura il fattore $a + b$, possiamo procedere con il metodo del raccoglimento totale, ricavando la scomposizione richiesta.

$$= (a + b)(x + z)$$

Abbiamo terminato.

ESERCIZIO 8

Scomporre il seguente polinomio con la tecnica del raccoglimento parziale

$$ax + ay + 2x + 2y$$

Per poter scomporre il polinomio

$$ax + ay + 2x + 2y =$$

mediante il raccoglimento parziale, è sufficiente mettere in evidenza il fattore comune a tra i primi due addendi e 2 negli ultimi due addendi

$$= a(x + y) + 2(x + y) =$$

dopodiché raccogliamo totalmente il fattore comune $x + y$

$$= (x + y)(a + 2)$$

Abbiamo finito.

ESERCIZIO 9

Scomporre il seguente polinomio, avvalendosi del metodo di raccoglimento parziale.

$ax + 2bx + ay + 2by$

L'esercizio ci chiede di scomporre il polinomio

$$ax + 2bx + ay + 2by$$

usando la regola del raccoglimento parziale. Esaminiamo con molta attenzione gli addendi del polinomio:

$$ax \quad , \quad 2bx \quad , \quad ay \quad , \quad 2by$$

I primi due monomi condividono la lettera x, mentre gli ultimi due hanno in comune y, per cui il polinomio

$$ax + 2bx + ay + 2by =$$

si riscrive nella forma

$$= x(a + 2b) + y(a + 2b) =$$

dalla quale si evince che il binomio $a + 2b$ è il fattore comune agli addendi $x(a + 2b)$ e $y(a + 2b)$. Procedendo con il raccoglimento totale di $a + 2b$, ricaviamo la scomposizione richiesta.

$$= (a + 2b)(x + y)$$

Ecco fatto!

ESERCIZIO 10

Scomporre il seguente polinomio con la tecnica del raccoglimento parziale:

$$ay-y-a^2+a$$

Per scomporre il polinomio

$$ay-y-a^2+a$$

analizziamo con attenzione i monomi che lo compongono, ossia:

$$ay \quad , \quad -y \quad , \quad -a^2 \quad , \quad a$$

La prima coppia di termini condividono la lettera y, mentre gli ultimi due hanno in comune il fattore $-a$, per cui siamo autorizzati a usare il metodo del raccoglimento parziale: esso prevede di mettere in evidenza y tra i primi due addendi e $-a$ tra gli ultimi due, cosicché il polinomio

$$ay-y-a^2+a=$$

diventi

$$=y(a-1)-a(a-1)=$$

Nota importante: abbiamo messo in evidenza $-a$ anziché a nella seconda coppia di monomi, cosicché figurasse $a-1$ nei termini $y(a-1)$ e $-a(a-1)$. In altre parole, abbiamo fatto in modo che $a-1$ risulti un fattore comune, garantendoci la possibilità di operare il suo raccoglimento totale.

$$=(a-1)(y-a)$$

Ecco fatto.

ESERCIZIO 11

Utilizzare la tecnica del raccoglimento parziale per scomporre il polinomio

$$x^2 + xy - x - y$$

Oltre a fornirci il polinomio da scomporre, l'esercizio ci impone di usare il metodo del raccoglimento parziale.

Esaminiamo i monomi che compongono il polinomio:

$$x^2 + xy - x - y$$

vale a dire:

$$x^2 \quad , \quad xy \quad , \quad -x \quad , \quad -y$$

Osserviamo che i termini x^2 e xy condividono il fattore x, mentre $-x$ e $-y$ condividono il fattore -1, per cui procedendo con il raccoglimento parziale

$$x^2 + xy - x - y =$$

diviene

$$= x(x + y) - (x + y) =$$

È evidente che il binomio $x + y$ sia il fattore comune dei termini $x(x + y)$ e $-(x + y)$, per cui mettiamolo in evidenza, rifacendoci al metodo del raccoglimento totale.

$$= (x + y)(x - 1)$$

Abbiamo finito!

ESERCIZIO 12

Fattorizzare il seguente polinomio con la tecnica del raccoglimento parziale:

$(a-2)(a-1)-a+1$

Per scomporre il polinomio

$$(a-2)(a-1)-a+1$$

con il metodo del raccoglimento parziale occorre esaminare preliminarmente i termini che lo compongono, vale a dire:

$$(a-2)(a-1) \quad , \quad -a \quad \text{e} \quad +1$$

Il primo è chiaramente un prodotto di polinomi, il secondo e il terzo, invece, sono semplici monomi. Se raccogliamo il segno — tra $-a$ e 1, la regola dei segni ci permette di scrivere l'espressione

$$(a-2)(a-1)-a+1=$$

nella forma

$$=(a-2)(a-1)-(a-1)=$$

dalla quale si deduce che $a-1$ è il fattore comune dei termini $(a-2)(a-1)$ e $(a-1)$. Operando il raccoglimento totale di $a-1$, ricaviamo la scomposizione richiesta.

$$=(a-1)[a-2-1]=(a-1)(a-3)$$

Abbiamo terminato.

ESERCIZIO 13

Esprimere il seguente polinomio nel prodotto di fattori irriducibili, avvalendosi del metodo del raccoglimento parziale:

$1-3a^3+a-3a^2$

Il nostro compito prevede di usare il metodo del raccoglimento parziale per fattorizzare il polinomio

$$1-3a^3+a-3a^2$$

Prima di tutto esaminiamo attentamente i termini che lo compongono. Essi sono:

$$1 \quad , \quad -3a^3 \quad , \quad a \quad , \quad -3a^2$$

La prima coppia non condivide alcun fattore (non banale) e, sebbene $a \text{ e } -3a^2$ abbiano a come fattore comune, la sua messa in evidenza non conduce a nulla di buono (nel senso che non permette di scomporre il polinomio).

Tentiamo un approccio differente! Se analizziamo con attenzione i quattro termini, ci accorgiamo che $-3a^3 \text{ e } -3a^2$ hanno come fattore comune $-3a^2$ che, una volta messo in evidenza, fa sì che il polinomio

$$1-3a^3+a-3a^2=$$

si possa esprimere nella forma

$$=1+a-3a^2(a+1)=$$

Notato, inoltre, che il binomio $1+a$ è identico ad $a+1$ (per via della proprietà commutativa dell'addizione), il polinomio diventa

$$=(a+1)-3a^2(a+1)=$$

Da questa deduciamo che $a+1$ è il fattore comune dei termini $(a+1) \text{ e } -3a^2(a+1)$, pertanto possiamo raccoglierlo totalmente, ricavando così la scomposizione richiesta.

$$=(a+1)(1-3a^2)$$

Abbiamo finito.

ESERCIZIO 14

Usare la tecnica del raccoglimento parziale per scomporre il polinomio:

$$am + bm + cm - an - bn - cn$$

Il nostro compito consiste nello scomporre il polinomio

$$am + bm + cm - an - bn - cn$$

con la tecnica del raccoglimento parziale. Questo metodo prevede di esaminare meticolosamente i termini del polinomio dato e di ricavare i cosiddetti fattori comuni parziali tra due o più addendi. Una volta messi in evidenza, portiamo a termine l'esercizio con un opportuno raccoglimento totale.

Nel caso considerato, i termini del polinomio sono:

$$am \quad , \quad bm \quad , \quad cm \quad , \quad -an \quad , \quad -bn \quad , \quad -cn$$

Nei primi tre termini figura la lettera m e rappresenta il loro fattore comune; negli ultimi tre, il fattore comune è invece $-n$, pertanto se procediamo con il loro raccoglimento parziale, l'espressione

$$am + bm + cm - an - bn - cn =$$

si tramuta in

$$= m(a + b + c) - n(a + b + c) = (\bullet)$$

Questa rielaborazione mette in luce il fattore $a + b + c$, comune agli addendi

$$m(a + b + c) \quad \text{e} \quad -n(a + b + c)$$

Operandone il suo raccoglimento totale, ricaviamo la scomposizione del polinomio iniziale, ossia:

$$(\bullet) = (a + b + c)(m - n)$$

Abbiamo finito!

ESERCIZIO 15

Usare il metodo del raccoglimento parziale per scomporre il seguente polinomio

$$x^2 + a^2 + x^3 + a^2 x$$

Consideriamo il polinomio

$$x^2 + a^2 + x^3 + a^2 x$$

Il nostro obiettivo consiste nell'esprimerlo come prodotto di fattori irriducibili usando il metodo del raccoglimento parziale.

Per prima cosa, analizziamo i termini del polinomio e individuiamo i possibili fattori comuni, analizzandone le coppie. In questo caso, i termini del polinomio sono:

$$x^2 \quad , \quad a^2 \quad , \quad x^3 \quad , \quad a^2 x$$

I primi due termini condividono il fattore comune banale, 1, mentre il fattore comune agli ultimi due è x, essendo essa la lettera comune elevata all'esponente più piccolo.

Usando le proprietà delle potenze, e in particolare la regola sul quoziente di due potenze con la stessa base, il polinomio

$$x^2 + a^2 + x^3 + a^2 x =$$

si esprime nella forma

$$= x^2 + a^2 + x(x^{3-1} + a^2 x^{1-1}) =$$

$$= (x^2 + a^2) + x(x^2 + a^2) =$$

Questa espressione mette in risalto il fatto che $x^2 + a^2$ è il fattore comune a $x^2 + a^2$ e $x(x^2 + a^2)$, per cui siamo autorizzati a metterlo in evidenza, seguendo la tecnica del raccoglimento totale.

$$= (x^2 + a^2)(1 + x)$$

Abbiamo finito!

ESERCIZIO 16

Fattorizzare il polinomio

$$2x(x-y)^2 - 4xy + 4y^2$$

con il metodo del raccoglimento parziale.
Per scomporre il polinomio

$$2x(x-y)^2 - 4xy + 4y^2$$

con il metodo del raccoglimento parziale occorre innanzitutto esaminare i termini che lo compongono, vale a dire:

$$2x(x-y)^2 \quad , \quad -4xy \quad \text{e} \quad 4y^2$$

Il primo è il prodotto di un monomio per un polinomio, mentre sia il secondo che il terzo sono semplicissimi monomi, il cui fattore comune è $-4y$.

Procediamo con il raccoglimento parziale cosicché il polinomio

$$2x(x-y)^2 - 4xy + 4y^2 =$$

si possa esprimere nella seguente forma:

$$= 2x(x-y)^2 - 4y(x-y) =$$

La scelta di considerare $-4y$ con il segno $-$ non è casuale, anzi diventa fondamentale per la risoluzione dell'esercizio perché consente di mettere in evidenza $x-y$, fattore comune dei termini $2x(x-y)^2$ e $-4y(x-y)$.

Attenendoci al metodo del raccoglimento totale, siamo in grado di esprimere il polinomio come prodotto tra $x-y$ e un altro polinomio i cui termini si ottengono dividendo per $x-y$ sia $2x(x-y)^2,\ \text{sia}\ -4y(x-y).$

Chiaramente non conviene effettuare la divisione, tutt'altro! Basta attenersi meticolosamente alle proprietà delle potenze, e in particolare alla regola sul quoziente di due potenze con la stessa base e scrivere la seguente espressione:

$$=(x-y)[2x(x-y)^{2-1}-4y(x-y)^{1-1}]=$$

$$=(x-y)[2x(x-y)^1-4y(x-y)^0]=$$

Ricordando che una potenza a esponente nullo è uguale a zero, il polinomio diventa

$$=(x-y)[2x(x-y)-4y]=$$

$$=(x-y)[2x^2-2xy-4y]$$

Raccogliamo, infine, 2 dal polinomio interno alle parentesi quadre e mettiamo un punto all'esercizio.

$$=2(x-y)[x^2-xy-2y]$$

Abbiamo finito!

ESERCIZIO 17

Usare il metodo del raccoglimento parziale per scomporre il polinomio:

$$(x-y)(x+y)^2-4ax-4ay+xy^3+y^3$$

Il testo dell'esercizio suggerisce di usare il metodo del raccoglimento parziale per scomporre il polinomio

$$(x-y)(x+y)^2-4ax-4ay+xy^2+y^3$$

Per prima cosa, esaminiamo con attenzione i termini del polinomio:

$$(x-y)(x+y)^2 \quad , \quad -4ax \quad , \quad -4ay \quad , \quad xy^2 \quad , \quad y^3$$

Aguzzando la vista, ci accorgiamo immediatamente che il secondo e il terzo condividono il fattore comune $-4a$, mentre il quarto e il quinto hanno y^2 in comune. Procedendo con il raccoglimento parziale, il polinomio

$$(x-y)(x+y)^2-4ax-4ay+xy^2+y^3=$$

diventa

$$=(x-y)(x+y)^2-4a(x+y)+y^2(x+y)=$$

A questo punto, bisogna operare il raccoglimento totale di $x+y$, cosicché il polinomio dato si possa esprimere nel prodotto tra $x+y$ e il polinomio i cui termini si ottengono dividendo $(x-y)(x+y)^2,\ -4a(x+y)$ e $y^2(x+y)$ per $x+y$. Sia chiaro che non è necessario svolgere le varie divisioni: basta interpellare le proprietà delle potenze, e in particolare la regola sul quoziente di due potenze con la stessa base. È proprio grazie a questa regola che l'espressione diventa

$$=(x+y)\left[(x-y)(x+y)^{2-1}-4a(x+y)^{1-1}+y^2(x+y)^{1-1}\right]=$$

$$=(x+y)\left[(x-y)(x+y)-4a(x+y)^0+y^2(x+y)^0\right]=$$

$$=(x+y)\left[(x-y)(x+y)-4a+y^2\right]=$$

Esplicitiamo il prodotto tra $x-y$ e $x+y$

$$=(x+y)\left[x^2+xy-xy-y^2-4a+y^2\right]=$$

e infine sommiamo tra loro i monomi simili, così da ricavare la scomposizione del polinomio espressa in forma normale.

$$=(x+y)\left[x^2-4a\right]$$

Abbiamo terminato.

ESERCIZIO 18

Scomporre il seguente polinomio, operando prima con il raccoglimento totale e in seguito con il raccoglimento parziale.

$$bmn + 2bn + bm + 2b$$

I termini del polinomio $bmn + 2bn + bm + 2b$ sono:

$$bmn \quad , \quad 2bn \quad , \quad bm \quad , \quad 2b$$

e condividono il fattore comune b, pertanto possiamo metterlo in evidenza, attenendoci al metodo del raccoglimento totale, grazie al quale:

$$bmn + 2bn + bm + 2b =$$

diventa

$$= b(mn + 2n + m + 2) =$$

Analizziamo il polinomio racchiuso tra le parentesi tonde: i primi due termini, mn e $2n$, condividono il fattore comune n: procedendo con il raccoglimento parziale, l'espressione diventa

$$= b[n(m + 2) + m + 2] =$$

Notiamo, a questo punto, che $m + 2$ è il fattore comune dei termini $n(m + 2)$ e $m + 2$, per cui, raccogliendolo totalmente, ricaviamo:

$$= b[(m + 2)(n + 1)] =$$

$$= b(m + 2)(n + 1)$$

Abbiamo finito!

ESERCIZIO 19

Scomporre il seguente polinomio, utilizzando il raccoglimento parziale e/o raccoglimento totale

$a^4 - a^3b + a^2(a-b)(a+2b) + a^5 - a^4b$

Il polinomio da scomporre è

$$a^4 - a^3b + a^2(a-b)(a+2b) + a^5 - a^4b =$$

Effettuiamo un raccoglimento parziale tra i primi due termini e gli ultimi. Dai primi due monomi, raccogliamo il fattore comune a^3

$$= a^3(a-b) + a^2(a-b)(a+2b) + a^5 - a^4b =$$

Dagli ultimi due raccogliamo, invece, il fattore comune a^4

$$= a^3(a-b) + a^2(a-b)(a+2b) + a^4(a-b) =$$

Osserviamo che ogni addendo ha due fattori comuni, ossia a^2 e $(a-b)$, di conseguenza è naturale procedere con il raccoglimento totale:

$$= a^2(a-b)[a + (a+2b) + a^2] =$$

$$= a^2(a-b)[a + a + 2b + a^2] =$$

Sommiamo i monomi simili all'interno delle parentesi quadre

$$= a^2(a-b)[2a + 2b + a^2]$$

e abbiamo finito!

ESERCIZIO 20

Utilizzare il raccoglimento parziale e/o raccoglimento totale per scomporre il polinomio

$3a^2b - 3ab^2 + ab(a-b)^2$

Per scomporre il polinomio

$$3a^2b - 3ab^2 + ab(a-b)^2 =$$

bisogna prima di tutto ricorrere al raccoglimento parziale: in particolare raccogliamo i fattori $3ab$ dai primi due addendi:

$$= 3ab(a-b) + ab(a-b)^2 =$$

dopodiché raccogliamo totalmente il fattore comune $(a-b)$

$$= 3ab(a-b)[1 + (a-b)] =$$

$$= 3ab(a-b)[a-b+1]$$

Abbiamo finito.

ESERCIZIO 21

Il nostro compito consiste nello scomporre il polinomio

$$\frac{1}{2}a^3 + a^2 + a + 2 =$$

Non possiamo usare il raccoglimento totale perché i monomi che compongono il polinomio, non hanno fattori comuni, però possiamo avvalerci della tecnica del raccoglimento parziale.

Proprio perché compare un coefficiente fratto, conviene prima di tutto esprimere i vari addendi a denominatore comune

$$= \frac{a^3 + 2a^2 + 2a + 4}{2} =$$

dopodiché raccogliamo parzialmente a^2 tra i primi due addendi del numeratore e 2 tra gli ultimi due

$$= \frac{a^2(a+2) + 2(a+2)}{2} =$$

Per mettere un punto all'esercizio, è sufficiente raccogliere il fattore comune $(a+2)$

$$= \frac{(a+2)(a^2+2)}{2} = \frac{1}{2}(a+2)(a^2+2)$$

Nota: il binomio $a^2 + 2$ non è ulteriormente scomponibile.

Ecco fatto!

ESERCIZIO 22

Scomporre il seguente polinomio utilizzando la tecnica del raccoglimento parziale

$$x^n y^n + x^n b + x^{n+1} + ay^n + ab + ax$$

Il problema chiede di scomporre il polinomio

$$x^n y^n + x^n b + x^{n+1} + ay^n + ab + ax =$$

caratterizzato dalla presenza di esponenti letterali. La tecnica risolutiva è suggerita dalla traccia stessa: dovremo procedere con il raccoglimento parziale.

In maniera più esplicita, dobbiamo considerare i primi tre monomi e gli ultimi tre: dalla prima tripletta raccogliamo il fattore comune x^n, dall'ultima tripletta raccogliamo invece a:

$$= x^n(y^n + b + x) + a(y^n + b + x) =$$

Notiamo che i due addendi hanno in comune il trinomio $(y^n + b + x)$, pertanto siamo autorizzati a procedere con il raccoglimento totale e ottenere così la scomposizione in fattori irriducibili del polinomio dato:

$$= (y^n + b + x)(x^n + a)$$

Abbiamo finito.

ESERCIZIO 23

Scomporre in fattori i seguenti polinomi a esponenti letterali con la tecniche del raccoglimento parziale

- $ax^n + bx^n + a + b$
- $x^n y^n + y^n + 2x^n + 2$

L'esercizio ci chiede di scomporre due polinomi come prodotto di fattori irriducibili, avvalendoci della tecnica del raccoglimento parziale. La peculiarità del problema consiste nel fatto che i polinomi da scomporre sono a esponenti letterali: è una piccola difficoltà aggiuntiva che si aggira facilmente con le proprietà delle potenze.

Consideriamo il polinomio

$$ax^n + bx^n + a + b =$$

Proprio perché i primi due addendi hanno x^n come fattore comune, siamo autorizzati a metterlo in evidenza ottenendo:

$$= x^n(a + b) + a + b =$$

A questo punto dovrebbe essere chiaro quale sia il passaggio successivo: possiamo procedere con il raccoglimento totale del binomio $a + b$, ricavando così la scomposizione richiesta.

$$= (a + b)(x^n + 1)$$

Abbiamo finito.
Consideriamo il polinomio a esponenti letterali

$$x^n y^n + y^n + 2x^n + 2 =$$

Per poterlo scomporre in fattori irriducibili, raccogliamo parzialmente y^n tra i primi due addendi e 2 tra gli ultimi due.

$$= y^n(x^n + 1) + 2(x^n + 1) =$$

A questo punto, raccogliamo totalmente il fattore comune $x^n + 1$ così da ricavare la scomposizione richiesta.

$$= (x^n + 1)(y^n + 2)$$

Ecco fatto!

ESERCIZIO 24

Scomporre i seguenti polinomi a esponenti letterali

- $x^n y^n - 3y^n - 12 + 4x^n$
- $x^{3n} - x^{2n} - 2x^n + 2$

Per poter scomporre i polinomi a esponenti letterali

$$x^n y^n - 3y^n - 12 + 4x^n \quad \text{e} \quad x^{3n} - x^{2n} - 2x^n + 2$$

bisogna avvalersi della tecnica di raccoglimento parziale: si tratta di raccogliere i fattori comuni tra due o più monomi in modo tale che sia possibile effettuare in seguito un raccoglimento totale.

Consideriamo il polinomio

$$x^n y^n - 3y^n - 12 + 4x^n =$$

e osserviamo che y^n è il fattore comune dei primi due addendi, mentre 4 rappresenta il fattore comune degli ultimi due: procediamo con il raccoglimento parziale

$$= y^n(x^n - 3) + 4(x^n - 3) =$$

Proprio perché il binomio $x^n - 3$ è il fattore comune dei due addendi, siamo autorizzati a metterlo in evidenza

$$= (x^n - 3)(y^n + 4)$$

Abbiamo finito! L'ultima espressione rappresenta infatti la scomposizione del polinomio.
Esaminiamo il polinomio

$$x^{3n} - x^{2n} - 2x^n + 2 =$$

Il fattore comune dei primi due addendi è x^{2n}, mentre dagli ultimi due possiamo raccogliere -2. Nota: dobbiamo avvalerci delle proprietà delle potenze per determinare gli esponenti dei termini interni alle parentesi tonde

$$= x^{2n}(x^{3n-2n} - x^{2n-2n}) - 2(x^n - 1) =$$

$$= x^{2n}(x^n - x^0) - 2(x^n - 1) =$$

$$= x^{2n}(x^n - 1) - 2(x^n - 1) =$$

Siamo a un passo dalla conclusione: bisogna solamente raccogliere con la tecnica del raccoglimento totale il fattore $x^n - 1$

$$= (x^n - 1)(x^{2n} - 2)$$

L'esercizio è concluso.